PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{R}$ le corps des réels, et $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques réelles définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On note par A l'endomorphisme de $\mathscr{V}$ qui, de tout f de $\mathscr{V}$, de dérivée f', donne une image Af définie pour tout x réel par

$$Af(x) = f'(x) + 2xf(x)$$

$A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A$ (n facteurs) désigne la n^{e} itérée de A, $A^1 = A$ et A^0 est l'application identique de $\mathscr{V}$ (donc $A^0 f = f$ pour tout f de $\mathscr{V}$).

De façon analogue, si g est une fonction numérique réelle définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, on désigne par $A_x g$ et $A_y g$ les fonctions numériques définies en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} A_x g(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2xg(x,y) \\ A_y g(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + 2yg(x,y). \end{aligned}$$

1. (a) Trouver le noyau de A. En donner la dimension et une base.

   (b) Pour f_1 appartenant à $\mathscr{V}$, calculer l'image par A^n de la fonction

   $$x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} f_1(x);$$

   en déduire le noyau de A^n ; en donner la dimension et une base.

   (c) Montrer que, pour tout λ réel, il existe un élément et un seul f_λ de $\mathscr{V}$, qu'on calculera, tel que :

   $$Af_\lambda = \lambda f_\lambda \qquad f_\lambda(0) = 1.$$

   Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathscr{V}$ vérifiant, pour tout λ réel et pour tout x réel la relation

   $$f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \varphi_n(x).$$

   Déterminer les φ_n, et vérifier les relations

   $$\begin{aligned} \varphi_0(0) = 1, &\quad A\varphi_0 = 0 \\ \text{et, pour } n \geqslant 1, \quad \varphi_n(0) = 0, &\quad A\varphi_n = \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

2. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{V}$ telles que la suite de terme général $A^n f(x)$ converge uniformément vers zéro sur tout partie bornée de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{V}$.
   (b) On désigne par $\mathscr{H}_1$ (resp. $\mathscr{H}_2$) l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{V}$ qui sont des combinaisons linéaires à coefficients réels d'une famille finie (variable avec f) de fonctions φ_n $(n \in \mathbb{N})$ (resp. de fonctions f_λ avec $|\lambda| < 1$). Montrer que $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{H}$. Déterminer leur intersection.
   (c) Montrer que pour toute f de $\mathscr{H}$, la série de terme général $\varphi_n(y)A^n f(x)$ converge uniformément par rapport à (x, y) dans tout partie bornée du plan $\mathbb{R}^2$; on désigne par $F(x, y)$ la somme de cette série.
   Montrer qu'il en est de même des séries obtenues en dérivant la précédente, terme à terme, une fois partiellement par rapport à x ou une fois partiellement par rapport à y.
   (d) Établir les relations

$$F(x, 0) = f(x), \quad A_x F(x, y) = A_y F(x, y)$$

   où $F(x, y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(y)A^n f(x)$ est la somme de la série introduite à la question précédente.
   Montrer que lorsqu'on fixe y (resp. x) la fonction

$$x \mapsto F(x, y) \quad [\text{resp. } y \mapsto F(x, y)]$$

   appartient à $\mathscr{H}$.
3. Pour tout y réel fixé, on désigne par T^y l'endomorphisme de $\mathscr{H}$ qui donne, de tout f de $\mathscr{H}$, une image $T^y f$ définie pour tout x réel par :

$$T^y f(x) = F(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(y)A^n f(x).$$

   (a) On admettra (et on ne demande pas de le démontrer) que si les séries numériques (u_n) et (v_n) sont, chacune; absolument convergentes et si la suite de nombres réels (w_n) est bornée, alors est vraie la formule :

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p \left[\sum_{q=0}^{\infty} v_q w_{p+q}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} w_r \left[\sum_{p+q=r} u_p v_q\right].$$

   En déduire que, pour tous réels y et z on a :

$$T^z \circ T^y = \mathrm{e}^{2yz} T^{y+z}.$$

   (b) On désigne par S^y l'endomorphisme de $\mathscr{H}$ tel que

$$S^y f(x) = \mathrm{e}^{y^2} T^y f(x)$$

   pour toute f de $\mathscr{H}$.
   Montrer que lorsque y décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des endomorphismes S^y de $\mathscr{H}$ muni de la composition des applications est un groupe isomorphe au groupe additif de $\mathbb{R}$.

4. (a) Déterminer l'ensemble des fonctions G définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$A_x G(x, y) = A_y G(x, y)$$

(on pourra utiliser le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$).

(b) Parmi les fonctions G précédentes, montrer qu'il en existe une et une seule, qu'on calculera, qui vérifie pour tout x réel l'égalité

$$G(x, 0) = f(x)$$

où f est une fonction donnée dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire à l'aide de la fonction F de la question 2. (c) l'égalité suivante, valable pour toute f de $\mathscr{H}$, pour tout x réel et pour tout y réel :

$$\mathrm{e}^{2xy} f(x + y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \frac{y^n}{n!} A^n f(x).$$

5. (a) Exprimer, à l'aide d'une intégrale, les fonctions K définies et différentiables sur $\mathbb{R}^2$, qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$A_y K(x, y) - A_x K(x, y) = h(x, y)$$

où h est une fonction donnée, définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser le même changement de variables que dans la question 4. (a)).

(b) Démontrer que, parmi les fonctions K précédentes, il y en a une et une seule, qu'on notera L, telle que, pour tout x, $L(x, 0) = 0$ et que $L(x, y)$ peut être mis sous forme d'une intégrale.

(c) On choisit arbitrairement une fonction f de $\mathscr{H}$; soit F la fonction qui lui est associée par 2. (c). On définit une fonction H en posant pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$

$$H(x, y) = F(x, y) - \sum_{p=0}^{p=n} \varphi_p(y) A^p f(x)$$

($n \in \mathbb{N}$ étant fixé).

Calculer $H(x, 0)$ et $A_y H(x, y) - A_x H(x, y)$; en déduire la formule

$$\mathrm{e}^{2xy} f(x + y) = \sum_{p=0}^{p=n} \mathrm{e}^{-y^2} \frac{y^p}{p!} A^p f(x) + \int_x^{x+y} \mathrm{e}^{t^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{(x + y - t)^n}{n!} A^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t.$$