NOTES DE M. LIOUVILLE. [1]

Sur la limite vers laquelle tend l'expression $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$ *lorsque* m *augmente indéfiniment.*

1. Supposons d'abord que m soit un nombre entier positif. On a, par la formule du binôme démontrée dans les éléments,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{m^3}+\cdots+\frac{1}{m^{m^2}}$$

de sorte qu'en mettant le terme général

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{m^n}$$

sous la forme

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

il vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{m^m}.$$

Le nombre des termes du second membre augmente quand m augmente ; et, sauf les deux premiers termes qui restent fixes, chaque terme d'un rang donné augmente aussi : la valeur du second membre augmente en conséquence, mais sans pourtant jamais dépasser la somme

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots m},$$

ni *a fortiori* la somme

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

visiblement comprise elle-même entre 2 et 3. Donc enfin $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$ tend vers une certaine limite, plus grande que 2, plus petite que 3, et que nous désignerons par e.

2. Maintenant, si l'on observe que l'expression

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots m},$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque moindre que m, est plus petite que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right),$$

et partant moindre que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

on verra que l'on peut poser

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

inégalité qui devra subsister, quelque grand qu'on fasse m, en laissant n fixe, après avoir donné à n une valeur à volonté. On en conclut, à la limite :

$$e<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mais, d'un autre côté, la formule

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{m^n}$$

nous donne

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right).$$

Cette fois encore, laissons n fixe et faisons grandir m à l'infini. Le second membre tendra vers la limite

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n},$$

et le premier vers la limite e. On a donc

$$e>1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Les deux expressions entre lesquelles le nombre e se trouve compris ne diffèrent entre elles que par le terme

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{n},$$

qu'on rend aussi petit qu'on veut, en prenant n grand : elles permettent de calculer la valeur $2,718\ldots$ de e avec toute l'approximation qu'on voudra.

3. Soit à présent m positif, sans être un entier ; et je dis que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quand m grandira indéfiniment, tendra encore vers la limite e. Car soient p, $p+1$ les deux entiers successifs entre lesquels m est compris, et qui grandissent comme lui à l'infini : on aura

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p$$

et

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}.$$

Or les seconds membres de ces deux inégalités peuvent s'écrire respectivement

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1} : \left(1+\frac{1}{p+1}\right)$$

et

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\left(1+\frac{1}{p}\right);$$

quand p augmente à l'infini, ils tendent vers la limite commune e. Donc $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend aussi vers cette limite.

4. Enfin, soit m négatif et $=-q$. On a

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{q}\right)^{-q} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q}}\right)^q,$$

d'où

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(\frac{q}{q-1}\right)^q = \left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{q-1}\cdot\left(1+\frac{1}{q-1}\right);$$

et l'on retrouve encore pour q infini la limite e.

Références

[1] M. Navier. *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École polytechnique.* Victor Dalmont, 1856, p. 321-325.