Fonctions de la variable complexe
Fiche & Méthodes

d'après le cours MA104 – ENSTA Paris

A. Wayoff

2022–2023

Table des matières

1 Fonctions analytiques

1.1 Séries entières

Définition 1.1 (Série entière & Rayon de convergence). Une *série entière* est une fonction de la forme

$$z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{où } a_n \in \mathbb{C}.$$

On pose

$$\rho(S) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ r \geqslant 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty \right\}$$

le *rayon de convergence* de S.

Méthode 1.1. En pratique, on calcule le rayon de convergence d'une série entière S en utilisant l'une des formules

$$\frac{1}{\rho(S)} = \limsup |a_n|^{1/n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \quad (\text{Hadamard})$$

$$\frac{1}{\rho(S)} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \quad (\text{d'Alembert})$$

1.2 Fonctions analytiques : définition et exemples

Définition 1.2 (Fonction analytique). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

— Soit $z_0 \in \Omega$, la fonction f est développable en série entière en z_0 s'il existe une série entière S telle que $\rho(S) > 0$ et $f(z) = S(z - z_0)$.

— La fonction f est *analytique* dans Ω si elle est développable en série entière autour de tout $z \in \Omega$.

Définition 1.3 (Fonction entière). Une fonction est dite *entière* si elle est analytique sur $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1. Une fonction rationnelle est analytique dans $\mathbb{C}$ privé de ses pôles.

L'analyticité entraîne la continuité et la dérivabilité.

1.3 Principe des zéros isolés

Définition 1.4 (Connexité). Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit *connexe* si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Si z_0 et z_1 sont deux points de Ω, il existe une application continue $\gamma\colon [0\,;1] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$.

(ii) Si A et B sont deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$, alors l'un des deux ouverts A ou B est vide.

Définition 1.5 (Ensemble des zéros d'une fonction). On note $Z(f)$ *l'ensemble des zéros* de la fonction f :

$$Z(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ z \in \Omega \mid f(z) = 0 \}.$$

Remarque 1.2. Attention au calcul des zéros d'une fonction. Par exemple, prenons la fonction $f\colon z \mapsto \sin(1/z)$. *A priori*, les zéros de f ne sont pas uniquement les zéros de la fonction analogue définie sur $\mathbb{R}$. Il se trouve que c'est le cas mais pour s'en convaincre, il faut repasser par l'écriture du sinus complexe et de z sous sa forme algébrique.

Définition 1.6 (Point d'accumulation). Le point $z^\star$ est un *point d'accumulation* de la fonction f si

$$z^\star = \lim_{n \to \infty} z_n \text{ tel que } f(z_n) = 0.$$

> **Théorème 1.1 (Zéros isolés).** *Soient Ω connexe et f une fonction analytique dans Ω. Si $Z(f)$ a un point d'accumulation $z^\star \in \Omega$, alors $f \equiv 0$ dans Ω.*

Méthode 1.2. Pour montrer qu'une fonction est constante sur un domaine, il est judicieux d'utiliser le théorème de zéros isolés (ou le théorème de Liouville).

Théorème 1.2 (Prolongement analytique). *Soit $\mathcal{O}$ et Ω deux ouverts de $\mathbb{C}$, tels que $\mathcal{O} \subset \Omega$ et Ω est connexe, et soit f une fonction analytique dans $\mathcal{O}$. Alors il existe au plus une fonction g analytique dans Ω telle que $f = g$ dans $\mathcal{O}$. Dans ce cas, la fonction g est appelée le prolongement analytique de f à l'ouvert Ω.*

2 Fonctions holomorphes et intégrales de chemin

2.1 Fonctions holomorphes

Dans toute la suite, on identifie $f\colon z \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ à $\tilde{f}\colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

Théorème 2.1 (CNS de $\mathbb{C}$-dérivabilité). *La fonction f est dérivable en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie les relations de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0.$$

Dans ce cas,

$$f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}.$$

On pose $\tilde{f}(x,y) = P(x,y) + \mathrm{i}Q(x,y)$ avec P et Q à valeurs réelles. Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Remarque 2.1.

$$\text{différentiabilité} < \mathbb{C}\text{-dérivabilité}$$

Définition 2.1 (Fonction holomorphe).

$$f \textit{ holomorphe} \text{ dans } \Omega \iff f \text{ dérivable en tout } z \in \Omega.$$

Théorème 2.2 (Conservation de l'holomorphie par dérivation).

$$f \in H(\Omega) \implies f^{(n)} \in H(\Omega)\ \forall n \geqslant 1.$$

— Si $\nabla f \equiv 0$ sur un ouvert Ω **connexe**, alors $f \equiv 0$ sur Ω.
— La fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ n'est dérivable nulle part.

Proposition 2.1. *Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

— $f = \text{cste}$,
— $\mathrm{Re}(f) = \text{cste}$,
— $\mathrm{Im}(f) = \text{cste}$,
— $f(\overline{z}) = f(z)$.

2.2 Intégrales de chemin

Définition 2.2 (Paramétrage et intégrale de chemin). Un chemin est un couple (γ, g) où g est le paramétrage de γ :

$$g\colon [a\,;b] \to \mathbb{C},$$
$$g\big([a,b]\big) = \gamma.$$

On suppose de plus que

— g est injectif sur $[a\,;b[$,

— g est $\mathscr{C}^1$ par morceaux,
— $g'(t) \neq 0$ p.p. $t \in [a\,;b]$.

Soient γ un chemin paramétré par g est f une fonction continue sur γ, alors l'intégrale de f sur γ s'écrit

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Résultat à connaître. Sur un lacet γ,

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\mathrm{i}\pi.$$

Méthode 2.1. Paramétrage d'une ellipse dans $\mathbb{C}$:

$$g(t) = a\cos(t) + \mathrm{i}b\sin(t).$$

Lemme 2.1 (d'estimation).

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \operatorname{long}(\gamma) \sup_{z\in\operatorname{Im}(\gamma)} |f(z)|$$

2.3 Théorème de Cauchy (v1)

Théorème 2.3 (Cauchy). *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ le bord de Ω et $f \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$. Alors,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3 Suite de la théorie de Cauchy

3.1 Théorème de Cauchy (v2)

Théorème 3.1 (Cauchy). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_N$ le bord orienté du compact $\overline{\Omega}$. Alors,*

$$f \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big) \implies \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3.2 Formule de Cauchy

Proposition 3.1 (Formule de Cauchy). *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ borné, γ multi-lacet bord orienté de $\overline{\Omega}$ et $f \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega}\big)$. Alors,*

$$\forall a \in \Omega, \quad f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Méthode 3.1. Calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}.$$

Identifier les parties imaginaires avec $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

3.3 Conséquences

$$f \in H(\Omega) \implies f \text{ analytique sur } \Omega$$

3.3.1 Théorème de Liouville

Théorème 3.2 (Liouville). *Soit f une fonction* **entière** *telle qu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leqslant C(1+|z|^p)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à p.*

Remarque 3.1. En particulier, si f est bornée, alors f est constante.

4 Théorème des résidus

4.1 Série de Laurent

Définition 4.1 (Série de Laurent). Une *série de Laurent* est une série de fonctions de la forme

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{où } a_n \in \mathbb{C}.$$

Théorème 4.1. *Si $\rho(S^+)\rho(S^-) > 1$ alors la série de Laurent*

$$S(z) = S^+(z) + S^-\left(\frac{1}{z}\right)$$

converge dans la couronne

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{\rho(S^-)} < |z| < \rho(S^+) \right\}$$

vers une fonction holomorphe : $S \in H(\mathcal{C})$.

Théorème 4.2. *Soient r_1, r_2 tels que $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ et $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$. Si $f \in H(\mathcal{C})$, alors f est développable en série de Laurent :*

$$f(z) = S^+(z) + S^-\left(\frac{1}{z}\right) \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

avec $\rho(R^+) \geqslant r_2$ et $\rho(S^-) \geqslant \frac{1}{r_1}$.

4.2 Singularités isolées

Définition 4.2 (Disque pointé).

$$\dot{D}(z_0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z - z_0| < r \right\}$$

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{card}\{n < 0 \mid a_n \neq 0\} \leqslant +\infty$$

Classification des singularités :

— $\mathcal{N} = 0$: la singularité en z_0 est fictive

— $\mathcal{N} \neq 0$ et $\mathcal{N} < +\infty$: la fonction f a un pôle d'ordre m en z_0.

— $\mathcal{N} = +\infty$: la fonction f a une singularité essentielle en z_0.

Comment connaître le type de la singularité sans connaître le développement de Laurent ?

Lemme 4.1. *Soit $f \in H\big(\dot{D}(z_0, r)\big)$. On suppose que $(z - z_0)f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \ell \in \mathbb{C}$.*

— *si $\ell = 0$: z_0 est une singularité fictive,*

— *si $\ell \neq 0$: z_0 est un pôle d'ordre 1 (simple).*

4.3 Théorème des résidus

Définition 4.3 (Résidu). Soit $f \in H\big(\dot{D}(z_0, r)\big)$ qui s'écrit sous la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Le *résidu* de la fonction f en z_0 est

$$\operatorname{Res}(f, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} a_{-1}.$$

Par exemple, si la fonction f a un pôle simple en 0, elle s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + h(z)$$

avec h analytique.

Lemme 4.2. *Soit $f \in H\big(\dot{D}(z_0, r)\big)$,*

$$\forall \varepsilon \in \,]0\,;r[\quad \int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \mathrm{Res}(f, z_0)$$

où $\gamma_\varepsilon(z_0)$ est le cercle de centre z_0, de rayon ε, orienté dans le sens direct.

Théorème 4.3 (des résidus). *Soient Ω ouvert **borné** de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, de bord orienté γ. On pose $\mathcal{P} = \{z_1, \ldots, z_p\} \subset \Omega$ et soit $f \in H(\Omega \setminus \mathcal{P}) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{P}\big)$. Alors,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Méthode 4.1. Calcul de l'ordre d'un résidu
Soit z_0 un pôle de f. Son ordre p est tel que

$$(z - z_0)^p f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \ell \neq 0$$

ou bien tel que

$$\lim_{z \to z_0} f^{(p)}(z) = \ell \neq 0.$$

Si quel que soit l'entier p, la fonction $(z - z_0)^p f(z)$ n'est pas bornée dans le disque pointé $\dot{D}(z_0, r)$, alors f admet une **singularité essentielle** en z_0.

Méthode 4.2 (Calcul de résidus).

— $(z - z_0)f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \ell \neq 0 \iff z_0$ pôle **simple** et $\mathrm{Res}(f, z_0) = \ell$.

— Si f a un pôle **double** :

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big((z - z_0)^2 f(z)\big).$$

— Si f a un pôle d'ordre p,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!}\big((z - z_0)^p f(z)\big)^{(p-1)}.$$

— Cas d'une fraction : soit z_0 une racine de Q,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{Q(z)} P(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{Q(z) - Q(z_0)} P(z) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Méthode 4.3.

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \overline{\mathrm{Res}(f, -\mathrm{i})}$$

1 est une singularité essentielle de $z \mapsto \sin \frac{1}{1-z}$.
z_0 pôle simple. $f = \frac{u}{v}$.

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}.$$

Lemme 4.3 (Jordan). *Soit f telle que $(z - a)f(z)$ tende vers 0 lorsque z tend vers a. L'intégrale*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

prise le long d'un cercle de rayon infiniment petit décrit autour de a tend vers 0.

5 Fonctions logarithme et racine carrée, coupures

5.1 Préliminaires

L'intégrale d'une dérivée sur un lacet est nulle. On en déduit par exemple que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de dérivée dans $\mathbb{C}^\star$.

5.2 Primitive de fonctions holomorphes

Définition 5.1 (Primitive d'une fonction holomorphe). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, ouvert et soit $f \in H(\Omega)$. On appelle *primitive* F de f une fonction telle que $F' = f$. Si Ω est **connexe**, la fonction F est unique à une constante additive près.

Définition 5.2 (Ouvert étoilé). On dit que Ω est un *ouvert étoilé* s'il existe $a \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$, $[a\,;z] \subset \Omega$.

Lemme 5.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un **ouvert étoilé** et soit $f \in H(\Omega)$. Alors il existe $F \in H(\Omega)$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Soient Ω un ouvert étoilé et f une fonction différentiable de Ω dans $\mathbb{C}$ telle que son gradient est nul dans Ω. Alors f est constante dans Ω.

5.3 La fonction logarithme

Définition 5.3 (Détermination principale du log). On a défini une fonction $z \mapsto \log z$ telle que

- $\log z \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$,
- $(\log z)' = \frac{1}{z}$,
- $\log z = \log x$ si $x > 0$,
- $\log z = \log \rho + \mathrm{i}\theta$ si $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

Soient $x \in \mathbb{R}_-$ et $\varepsilon > 0$: $\log(x + \mathrm{i}\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \log|x| + \mathrm{i}\pi$ et $\log(x - \mathrm{i}\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \log|x| - \mathrm{i}\pi$

Le saut du log à travers sa coupure est donc égal à $2\mathrm{i}\pi$.

La fonction $z \mapsto \log z$ peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}_-^\star$ à partir de $\log(x + \mathrm{i}\varepsilon) \to \log|x| + \mathrm{i}\pi$.

5.4 La racine carrée

Définition 5.4 (Détermination principale de $\sqrt{z}$). On pose $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$. On définit la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ par

$$\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}(\log \rho + \mathrm{i}\theta)\right) = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

Proposition 5.1.

- $z \mapsto \sqrt{z} \in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$,
- $\sqrt{z} = \sqrt{x}$ *pour* $z = x > 0$,
- $\left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$,
- $\mathrm{Re}\sqrt{z} \geqslant 0$.

Son saut à travers la coupure est égal à $2\mathrm{i}\sqrt{\rho}$.

Remarque 5.1. Attention, on n'a pas toujours $\sqrt{z_1 z_2} = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$.

6 Transformations conformes

Dans la suite, on abrégera « transformation conforme » par « TC ».

6.1 Inversibilité des fonctions holomorphes

Lemme 6.1. *Soient $f \in H(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$, alors f est localement inversible et f^{-1} est holomorphe.*

Théorème 6.1. *Soient $\Omega \in \mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et $f \in H(\Omega)$ non constante.*

(i) f est une application ouverte, i.e. que l'image d'un ouvert est un ouvert. En paticulier, $f(\Omega) = \widetilde{\Omega}$ est un ouvert.

(ii) Si f est injective sur Ω, alors f' ne s'annule jamais dans Ω, donc il existe un inverse global $f^{-1} \in H(\widetilde{\Omega})$.

$$\forall z \in \Omega \quad f^{-1}\big(f(z)\big) = z, \big(f^{-1}\big)'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)}.$$

6.2 Propriétés des transformations conformes

Proposition 6.1. *La TC conserve les angles et l'orientation.*

Proposition 6.2. *La TC transforme une fonction harmonique en une fonction harmonique.*

6.3 L'exemple des homographies

Définition 6.1 (Fonction homographique). Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$. Une *fonction homographique* f est de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Proposition 6.3. *Une fonction homographique f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ dont la réciproque est la fonction homographique*

$$f^{-1}(z) = -\frac{dz - b}{cz - a}.$$

Une fonction homographique est une composition des transformations élémentaires suivantes :

- **Translations :** $z \mapsto z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
- **Rotations :** $z \mapsto z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$,
- **Homothéties :** $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$,
- **Inversion :** $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Proposition 6.4. *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des droites et des cercles de $\mathbb{C}$. Une homographie transforme un élément de $\mathcal{F}$ (privé de $z^\star$) en un autre élément de $\mathcal{F}$ (privé de $\tilde{z}^\star$).*

6.4 Théorème de Riemann

Définition 6.2 (Simple connexité). Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ connexe est *simplement connexe* si pour tout lacet $\gamma \subset \Omega$, l'intérieur du lacet γ est dans Ω.

Remarque 6.1. Une couronne n'est pas simplement connexe.

Théorème 6.2 (Riemann). *Si Ω est simplement connexe et si $\Omega \neq \mathbb{C}$ alors, il existe une TC qui transforme Ω en le disque unité.*

- Attention aux erreurs de signe dans le parcours des chemin.
-

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

$$\frac{1}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1|} \leqslant \frac{1}{|R - 1|}$$

7 Outils

— **Principe de l'argument.**
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ de bord orienté γ et soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, et non identiquement nulle.
Si f ne s'annule pas sur γ,

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathcal{Z}(f,\Omega)$$

où $\mathcal{Z}(f,\Omega)$ désigne le nombre de zéros de f situés dans Ω, comptés avec leur ordre de multiplicité.

— **Théorème de Morera.**
Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. Une fonction continue $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si pour tout triangle T inclus dans Ω, $\displaystyle\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

— **Inégalité de Cauchy.**
Soit f une fonction holomorphe dans un disque de centre z_0 et de rayon R et soit $r \in \,]0\,;R[$. On note $M(r) = \displaystyle\sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Voir aussi Méthodes de calcul d'intégrales de contour – Wikipédia