Chaînes de Markov (v1)

Classification des états & Théorèmes ergodiques

A. Wayoff

Notations

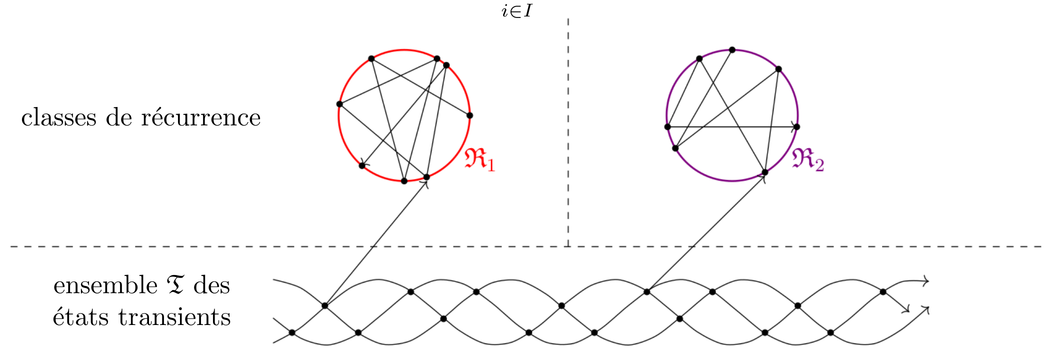
$V_x = \mathrm{card}\{n \geqslant 1 \mid X_n = x\}$ nombre de visites

$\tau_x^+ = \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n = x\}$ temps de premier retour

Chaîne irréductible

$\forall (x,y) \in \mathfrak{X}^2 \quad x \rightsquigarrow y \iff \exists n_{x,y} \geqslant 1$ tel que $P^n(x,y) > 0 \iff \mathcal{G}_P$ connexe

$$\mathfrak{X} = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{R}_i \sqcup \mathfrak{T}$$



Critère récurrence / transience

$$\begin{cases} x \text{ récurrent} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x,x) = +\infty \\ x \text{ transient} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x,x) < +\infty \end{cases}$$

État récurrent

$\mathbf{P}_x\left[\tau_x^+ < +\infty\right] = 1 \implies \mathbf{P}_x\left[V_x = +\infty\right] \overset{\text{p.s.}}{=} 1$

État transient

$\mathbf{P}_x\left[\tau_x^+ = +\infty\right] = 1 - p < 1 \implies \forall k \geqslant 0, \mathbf{P}_x\left[V_x = k\right] = (1-p)^k p$

$\mathbf{P}_x\left[V_x < +\infty\right] \overset{\text{p.s.}}{=} 1$

Récurrence positive

$\forall x \in \mathfrak{X}, \quad \mathbf{E}_x\left[\tau_x^+\right] < +\infty$

Récurrence nulle

$\exists x \in \mathfrak{X}, \quad \mathbf{E}_x\left[\tau_x^+\right] = +\infty$

toutes les mesures invariantes ont masse **infinie**

Convergence en loi

$\forall x \in \mathfrak{X}, \forall \pi_0, \quad \mathbf{P}_{\pi_0}[X_n = x] = \pi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Théorème ergodique

$$\forall x \in \mathfrak{X}, \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}} \xrightarrow[N \to \infty]{} \underbrace{\pi(x) = \frac{1}{\mathbf{E}_x\left[\tau_x^+\right]}}_{\text{unique mesure}}$$

de probabilité invariante

$\sum_{x \in \mathfrak{X}} \mu(x) = 1 \qquad \mu P = \mu$

$$\forall x \in \mathfrak{X}, \quad \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}}_{\to +\infty} \xrightarrow[N \to \infty]{\text{p.s.}} 0$$

Mesure réversible

$\forall (x,y) \in \mathfrak{X}^2, \quad \pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$

Période

$h(P) = \mathrm{pgcd}\{n \geqslant 0 \mid P^n(x,x) > 0\} = 1$

la période est la même pour tous les états d'une même classe

apériodique

Convergence en loi

$\forall x \in \mathfrak{X}, \forall \pi_0, \quad \mathbf{P}_{\pi_0}[X_n = x] = \pi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi(x)$

Figure de Pierre-Loïc Méliot (https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pierre-loic.meliot/markov/markov_theory.pdf)