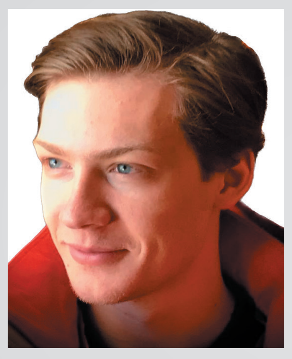
GÉOMÉTRIE & ALGÈBRE

ARMAND WAYOFF

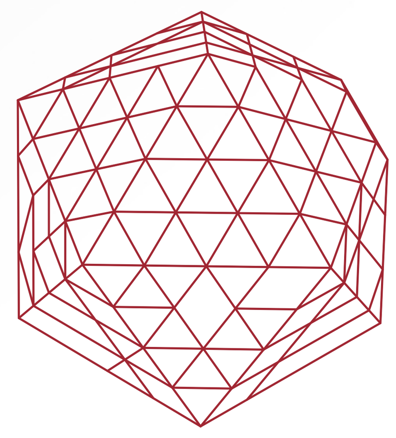


CENTRE DE FRANÇAIS
Langue • Culture • Francophonie

GÉOMÉTRIE & ALGÈBRE

Notre voyage lexical commence en géométrie, branche des mathématiques fondée sur l'étude des figures comme les polygones, avant d'emprunter le pont des coniques, en particulier les ellipses, les paraboles et les hyperboles qui nous mèneront en algèbre où les équations ont pris naissance.
Les premières notions de géométrie reconnues remontent à 3000 av. J.-C. et permettent alors de répondre à des besoins et des questions concrètes dans des domaines tels que la topographie, l'architecture, l'astronomie ou encore l'agriculture.
La géométrie euclidienne, formalisée par Euclide dans ses Éléments, traite du plan et de l'espace ; elle est souvent présentée comme une géométrie « de la règle et du compas ». Les objets considérés sont les points, les segments, les droites, les demi-droites, avec leurs propriétés d'incidence, tracées à la règle, ainsi que les cercles, tracés au compas. Les enjeux essentiels de cette géométrie sont l'étude des figures et de la mesure. Intéressons-nous justement au mot désignant une grande famille de figures : les polygones.

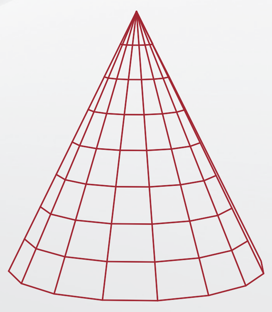
POLYGONE



En géométrie, un *polygone* est une *figure plane limitée par des segments de droite consécutifs*. Cette définition intuitive ne permet pas d'étudier rigoureusement un polygone d'un point de vue mathématique. Une définition plus formelle pourrait s'écrire : si n points, avec n supérieur ou égal à 3, notés $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont situés dans un même plan, et ne sont pas alignés 3 par 3, le *polygone* de sommets $S_1, S_2, \dots, S_n$ est la figure formée par les n segments $[S_1S_2], [S_2S_3], \dots, [S_{n-1}S_n], [S_nS_1]$ [15].
Cette définition permet alors de désigner précisément les côtés ; les segments $[S_iS_{i+1}]$, les sommets ; les points S_i, les diagonales d'un polygone etc. Aussi, on peut alors définir des sous-familles de polygones comme les polygones concaves, convexes, réguliers etc. La figure 1 illustre quelques exemples de polygones.

Figure 1 – Quelques polygones [16]

Le terme *polygone* est emprunté, par l'intermédiaire du latin *polygonum*, du grec *polugônon*, de même sens, lui-même composé à partir des termes *polus*, « nombreux, abondant », et *gônia*, « angle » [7] ; les grecs prenaient en compte les angles plutôt que les côtés d'un polygone. Nous observons que l'étymologie du terme *polygone* correspond bien à sa définition, qui n'a globalement pas évoluée dans le temps.
Le terme *polygone* apparaît pour la première fois en 1520 écrit sous la forme *poligone* littéralement « qui a plusieurs angles » dans le texte intitulé *Emanuel. Succinte, briefve et compendieuse collection géométrale*, écrit par le médecin Pierre Verney [4].



CONIQUES (ELLIPSE, HYPERBOLE & PARABOLE)

En géométrie euclidienne, une *conique* est une *courbe plane algébrique*, définie initialement comme l'intersection d'un cône de révolution avec un plan.
Les coniques sont d'un intérêt particulier en astronautique et en mécanique céleste car elles décrivent des orbites d'un système à deux corps sous l'effet de la gravitation [8].
Les mots *ellipse*, *hyperbole* et *parabole* ont été transcrits par l'astronome allemand Johannes Kepler des mots grecs *elleipsis*, *huperbolê* et *parabolê*, noms qui avaient été donnés par Aristée (IVe siècle avant J.C.) et popularisés par le géomètre et astronome Apollonius de Perge (env. 262-190 avant J.C.).
Le terme grec *elleipsis* a été formé à partir du verbe *elleipein* qui signifie « manquer » (le mot « éclipse » a la même origine), tandis que *huperbolê* et *parabolê* sont des mots grecs existant signifiant l'un « excès » et l'autre «ressemblance » ou « juste adéquation ». Le suffixe *bolê* vient du verbe *ballein* signifiant « lancer ».
Les trois mots *ellipse*, *parabole* et *hyperbole* représentent aussi des figures de rhétorique, en bonne adéquation avec leur étymologie : une *ellipse* est une formule raccourcie, une *parabole* est un récit allégorique, une *hyperbole* est une formule exagérée.
En mathématiques, une *ellipse* manque aussi de quelque chose et une *hyperbole* présente *un excès*, mais de quoi ?
D'après le dictionnaire historique de la langue française, une ellipse manque de perfection par rapport à un cercle. Cette interprétation n'est pas très satisfaisante car elle tue la symétrie qu'il y a entre l'ellipse et l'hyperbole autour de la parabole.
Plus sûre est l'interprétation suivantequi repose sur la représentation des coniques comme des sections de cône. On considère la section d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice :

- c'est une *ellipse* si l'angle d'ouverture du cône est *aigu* (déficit par rapport à l'angle droit),
- c'est une *hyperbole* si l'angle d'ouverture du cône est *obtus* (excès par rapport à l'angle droit),
- c'est une *parabole* si l'angle d'ouverture du cône est *droit* (juste adéquation).

Ces caractérisations des coniques sont représentées sur la figure 2.
Une deuxième explication peut provenir du fait que, en écriture moderne, l'équation générale réduite d'une conique est

$$y^2 = 2px + \lambda x^2,$$

l'ellipse, la parabole et l'hyperbole étant obtenues respectivement pour $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.
On lit sur cette équation que l'aire du carré construit sur l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle définie par l'abscisse et la corde passant par le sommet, aire à laquelle il faut retirer ou ajouter une certaine aire suivant que l'on a une ellipse ou une hyperbole, l'égalité ayant lieu pour la parabole (ceci se trouve dans le livre d'Apollonius sur les coniques). Lorsqu'on applique le carré y^2 sur le rectangle $2px$, le carré est *en défaut* dans le cas de l'ellipse – c'est le sens du terme grec *ellipse* – *en excès* dans le cas de l'hyperbole – c'est le sens du terme grec *hyperbole* – le terme parabole signifiant *l'égalité* des aires [14].

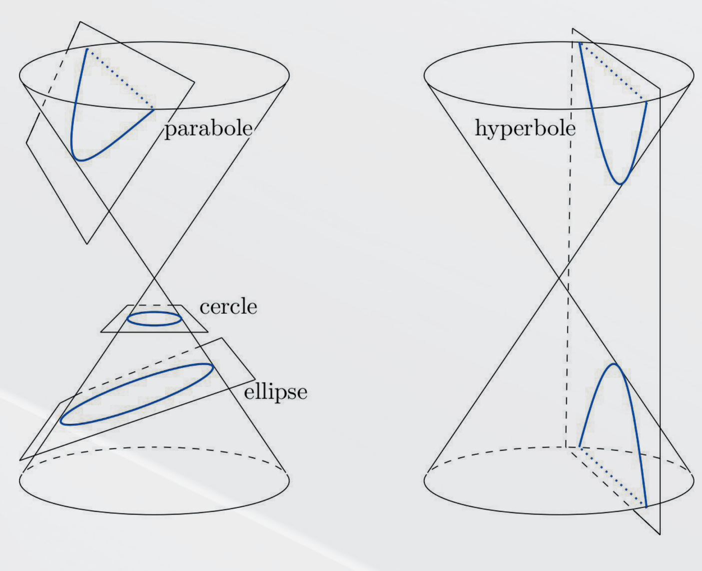


Figure 2 – Coniques

Cette dernière section, en particulier l'écriture des coniques sous forme d'une équation, mène tout naturellement à une nouvelle branche des mathématiques ; *l'algèbre*.

Sources : • Polygone – [4]Catalogue collectif de France – BNF. url: https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/ark:/06871/0018947390. – [7]CNRTL. url: https://www.cnrtl.fr/. – [15] Polygone – Bibmath.net. url : https://www.bibmath.net/dico/index. php?action=affiche&quoi=./p/polygone.html. – [16]Polygone – Wikipédia. url: https://fr.wiktionary.org/wiki/polygone. • Coniques – [8] Conique – Wikipedia. url: https://fr.wikipedia.org/wiki/Conique. – [14]Paul Milan. Termes et symboles mathématiques.