

RECUEIL D'EXERCICES ET RÉSULTATS CLASSIQUES DE MATHÉMATIQUES

*de niveau classes préparatoires (PSI-PC),
agrémenté d'illustrations, de remarques,
de méthodes et de notes historiques*

Armand WAYOFF
<https://armandwayoff.github.io/>

« Celui qui aura goûté, qui aura vu, ne fût-ce que de loin, la splendide harmonie des lois naturelles, sera mieux disposé à faire peu de cas de ses petits intérêts égoïstes ; il aura un idéal qu'il aimera mieux que lui-même, et c'est là le seul terrain sur lequel on puisse bâtir une morale. Pour cet idéal, il travaillera sans marchander sa peine et sans attendre aucune de ces grossières récompenses qui sont tout pour certains hommes ; et quand il aura pris ainsi l'habitude du désintéressement, cette habitude le suivra partout ; sa vie entière en restera comme parfumée. »

— Henri POINCARÉ, *Dernières pensées.*

PRÉFACE

TABLE DES MATIÈRES

Préface	iii
Table des matières	v
ALGÈBRE	1
1 Polynômes	3
1.1 Polynômes de LEGENDRE	5
1.2 Polynômes de HILBERT	5
1.3 Polynômes de BERNOULLI	6
1.4 Polynômes de TCHEBYCHEV	6
1.5 Polynômes scindés	8
1.6 Équation polynomiale	8
1.7 Théorème de LUCAS	8
2 Algèbre linéaire, Matrices	9
2.1 Polynômes de HILBERT	10
2.2 Polynômes de LAGRANGE	10
2.2.1 Motivations de l'interpolation polynomiale	10
2.2.2 Interpolation lagrangienne	11
2.2.3 Coordonées d'un polynôme dans la base de LAGRANGE	12
2.2.4 Lien avec les déterminants de VANDERMONDE	13
2.3 Matrice de VANDERMONDE	13
2.3.1 Inverse de la matrice de VANDERMONDE	15
2.4 Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	15
2.5 Semblables sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R}	16
2.6 Noyaux itérés	17
2.7 Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit	18
2.8 Matrices compagnon	18
2.8.1 Endomorphisme cyclique	19
2.8.2 Théorème de CAYLEY-HAMILTON	21
2.9 Caractérisation des homothéties	22
2.10 Inversion par sommation géométrique des endomorphismes nilpotents	23
2.11 Matrices de taille 3 d'ordre de nilpotence égal à 2	24
2.12 Famille libre engendrée par un endomorphisme nilpotent	24
2.13 Matrices de rang 1	25
2.14 Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes	27
2.15 Produit de matrices nilpotentes commutantes	28
2.16 Si $AB - BA = A \dots$	29
2.17 Application du théorème de recollement	30
2.18 Rang des puissances d'un endomorphisme nilpotent	31
2.19 Rang d'un endomorphisme nilpotent	32
2.20 [4] Planche no 3. Révision algèbre linéaire. Matrices	32
2.21 Un endomorphisme nilpotent	34
3 Déterminants	35
3.1 Déterminant tridiagonal	36
3.2 Déterminant des $ a_i - a_j $	38
3.3 Déterminant de CAUCHY	38
3.3.1 Matrice de HILBERT	40

3.4	Déterminant par blocs	40
3.5	Dérivée du déterminant	41
3.6	Déterminant de HÜRWITZ	41
3.7	Matrice circulante modulo p	42
4	Réduction des endomorphismes	43
4.1	Matrice à diagonale dominante	44
4.1.1	Localisation des valeurs propres	44
4.2	Matrices stochastiques	45
4.3	Endomorphismes semi-simples	48
4.4	Autour du commutant	50
4.5	Matrice circulante	51
4.5.1	Réduction d'une matrice circulante	52
4.5.2	Calcul des matrices de changement de base	53
4.6	Que dire si M^2 est diagonalisable ?	54
4.7	Raciné carrée d'une matrice	55
4.8	Réduction d'une matrice creuse	56
4.9	Vecteurs propres de $\text{com}(A)^T$	56
4.10	Éléments propres de MN , de NM	57
4.11	Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	57
4.11.1	Le cas des matrices inversibles	57
4.11.2	Le cas des matrices diagonalisables	59
4.11.3	Divers	61
4.12	Réduction simultanée	61
4.13	Critère de nilpotence par la trace	63
4.14	Supplémentaire stable	67
4.15	Endomorphisme ad_u	67
4.16	GRAIN DE RAISIN : Décomposition de DUNFORD	67
5	Espaces préhilbertiens ou euclidiens	71
5.1	Déterminant de GRAM	72
5.2	Positivité de la matrice de HILBERT	75
5.3	Décompositions matricielles	75
5.3.1	Décomposition d'IWASAMA	76
5.4	Inégalité d'HADAMARD	77
5.5	Familles de polynômes orthogonaux	78
5.5.1	Construction	79
5.5.2	Racines	80
5.5.3	Relation de récurrence	81
5.5.4	Équation différentielle	82
5.5.5	Conclusion	83
5.6	Rayon spectral d'une matrice	84
5.7	Caractérisation des projecteurs orthogonaux	84
5.8	Famille obtusangle	85
5.9	Exercice 6.28 du ELLIPSES	85
5.10	Exercice	85
6	Espaces vectoriels normés, suites	87
6.1	e est irrationnel	87
6.2	Autour du lemme de CESÀRO	87
6.2.1	Lemme de CESÀRO, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$	87
6.2.2	Une variante de CESÀRO	88
6.3	Normes ℓ^p et inégalités	88

7	Suites & Séries numériques	93
7.1	Lemme de CESÀRO	96
7.2	Série harmonique & Constante d'EULER	96
7.3	Séries de BERTRAND	98
7.4	Deux sommes	100
7.5	Sommation des relations de comparaison	101
7.6	Règle de RAABE-DUHAMEL	101
7.7	Suites sous-additive	102
7.8	Étude de la suite de terme général $\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n}$	103
7.9	Transformation d'ABEL	103
7.10	Convergence et calcul de $\sum \frac{r^n}{2^n}$	104
7.11	Suites du type $f(x_n) = n$	105
7.12	Suites définies implicitement	105
7.13	Sommation par paquets	105
7.14	Plan d'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$	105
7.15	Techniques classiques	106
	7.15.1 Développements asymptotiques	106
	7.15.2 Groupements de termes	106
7.16	Complément: Suites de CAUCHY	106
8	Intégration	109
8.1	Fonction intégrable et décroissante sur \mathbb{R}^+	109
8.2	Calcul d'une intégrale impropre	109
8.3	Intégrales de BERTRAND	109
8.4	Une propriété géométrique de l'intégrale	110
8.5	Permutation somme/intégrale	110
8.6	Lemme de LEBESGUE	111
	8.6.1 Variante du lemme de LEBESGUE	111
8.7	Sommes de RIEMANN généralisées	112
8.8	Intégration des relations de comparaisons	113
8.9	Intégrale de DIRICHLET	114
	8.9.1 Intégrabilité du sinus cardinal sur \mathbb{R}_+^*	115
	8.9.2 Intégrale de DIRICHLET via une intégrale à paramètre	115
	8.9.3 Régularité du sinus cardinal sur \mathbb{R}	115
8.10	Intégrale de GAUSS	116
8.11	Intégrale de WALLIS	116
	8.11.1 Séries génératrices	117
	8.11.2 Calcul de l'intégrale de GAUSS	118
	8.11.3 Volume d'une boule en dimension n	119
	8.11.4 GRAIN DE RAISIN: Produit de WALLIS	119
8.12	Intégrales eulériennes	119
	8.12.1 Fonction Gamma d'EULER	120
	8.12.2 Formule de STIRLING	121
	8.12.3 L'intégrale de GAUSS comme valeur particulière de la fonction Gamma	122
	8.12.4 Fonction bêta	122
8.13	Théorème de FUBINI	123
8.14	Transformée de LAPLACE	124
8.15	Version intégrale du lemme de CESÀRO	125
9	Géométrie, courbes et surfaces	127
9.1	Orthoptique d'une parabole	127
9.2	Plan d'étude des courbes	127

10	Fonctions d'une variable réelle	129
10.1	Point fixe d'une fonction de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$	130
10.2	Convexité et signe	130
10.3	ROLLE à l'infini	130
10.4	Théorème de DARBOUX	130
10.5	Uniforme continuité et intégrale convergente	131
10.6	Lemme de CROFT	131
11	Suites et séries de fonctions	133
11.1	Théorème d'approximation de WEIERSTRASS	134
11.2	Approximation polynomiale de BERNSTEIN	135
11.3	Intégration d'une série de fonctions	139
11.4	Équivalent d'une série de fonctions	139
11.5	Série de fonctions continues dont la somme est discontinue	140
11.6	Fonction ζ alternée	140
11.7	GRAIN DE RAISIN : Fonctions continues nulle part dérivables	141
11.7.1	Courbe du blancmanger ou de TAKAGI	142
11.7.2	Courbe de BOLZANO-LEBESGUE	143
11.7.3	Densité de F dans E	143
11.8	A rajouter	144
12	Séries entières	145
12.1	Matrice et série entière	145
12.2	Série génératrice des polynômes d'HERMITE	145
12.3	Théorème abélien ou taubérien sur les séries numériques	146
12.4	Fonction non développable en série entière	147
12.5	Comparaison de séries entières au bord	147
12.6	Développement en série entière	147
12.7	Série entière lacunaire	148
12.8	A rajouter:	148
13	Équations différentielles & Calcul différentiel	149
13.1	Lemme de GRONWALL, application à une équation différentielle	149
13.2	Solutions de $y'' + y = h$	149
13.3	Le wronskien	149
13.4	Relèvement angulaire	149
13.5	Variables séparables	149
DÉNOMBREMENT, PROBABILITÉS & VARIABLES ALÉATOIRES		151
14	Dénombrement	153
14.1	Identité de VANDERMONDE	153
14.2	Dénombrement des applications strictement croissantes	153
14.3	Dénombrement des applications croissantes	153
14.4	Dénombrement des surjections	153
14.5	Discontinuités des fonctions monotones	154
14.6	Nombres algébriques	155
15	Probabilités	157
15.1	Loi d'un maximum/minimum	157
15.2	Lemmes de BOREL-CANTELLI	157
15.3	Chaîne de MARKOV	157
15.4	Exercice d'oral	157
15.5	Fonction indicatrice d'EULER	158
15.6	<i>Exercice 4. Chap. VII:</i>	159

16 Variables aléatoires	161
16.1 Inégalités de concentration (et transformées de LAPLACE)	161
16.2 Calcul de $\mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^4 \right]$	161
16.3 Distance en variation totale	161
16.4 Majoration de la variance d'une v.a.d.r.	162
16.5 Identité de WALD	163
16.6 Allumettes de BANACH	164
16.7 Urne de PÓLYA	164
17 Exercices par thème	167
17.1 Endomorphismes nilpotents	167
Mathématiciens	169
Références	171
Alphabetical Index	173

ALGÈBRE

La théorie des équations polynomiales, qui précède de loin la définition formelle des polynômes, a été le propos essentiel de l'algèbre jusqu'au XIX^e siècle. Elle est à l'origine de nombreuses notions : corps, nombres algébriques . . . Son développement est lié aux extensions successives de la notion de nombre : introduction des nombres négatifs, des nombres irrationnels, puis des nombres complexes.

Dès la plus haute Antiquité, on rencontre des exemples de résolutions d'équations. Les Babyloniens savent résoudre l'équation du second degré et les Grecs en font la base même de leur géométrie.

Après l'Antiquité, il faudra attendre le XVI^e siècle pour que des progrès substantiels apparaissent, dus à l'école italienne. SCIPONE DEL FERRO, TARTAGLIA et CARDAN apportent la solution de l'équation du troisième degré. L'équation générale est ramenée à la forme réduite $x^3 + px + q = 0$ ♦, dont une solution s'écrit

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Cette solution soulève des difficultés : si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, cas où l'équation a des racines – on le sait depuis ARCHIMÈDE – on ne peut pas calculer x . Pour lever la difficulté, CARDAN introduit timidement de nouveaux nombres, « impossibles » ou « imaginaires ». FERRARI et BOMBELLI résolvent l'équation du quatrième degré.

Grâce à l'école italienne, la théorie générale des équations algébriques se précise. L'équation étant mise sous la forme $P(x) = 0$, on prend conscience de l'importance du degré de P pour le nombre de solutions. On découvre que si a est une racine de P , on peut factoriser par $x - a$. Les relations entre les coefficients et les fonctions symétriques des racines d'un polynôme apparaissent chez VIÈTE (1540-1603), mais c'est GIRARD qui en 1629 leur donne toute leur extension. Suivi par NEWTON, il exprime les sommes des puissances des racines en fonction des coefficients. L'étude des fonctions symétriques des racines va se développer au XVII^e siècle avec WARING et au XIX^e siècle avec CAUCHY. Au XVII^e siècle, la majorité des mathématiciens est convaincue qu'une équation de degré n possède n racines, celles-ci pouvant ne pas être réelles, mais il faut attendre D'ALEMBERT pour trouver en 1724 une définition précise des nombres complexes (sous la forme $a + \sqrt{-1}b$). En 1799, GAUSS fournit plusieurs preuves rigoureuses du « théorème fondamental de l'algèbre » ou « théorème de D'ALEMBERT-GAUSS ». Des progrès sont réalisés également dans l'étude du nombre de racines réelles, et de leur signe. En 1637, DESCARTES énonce la règle qui porte son nom sur le nombre de racines positives d'un polynôme. On trouve dans l'Algèbre de ROLLE (1690), la propriété suivante : entre deux solutions de l'équation $P(x) = 0$, il existe au moins une solution de l'équation $P'(x) = 0$. C'est STURM qui formule, en 1829, les résultats les plus précis sur le nombre de racines réelles d'un polynôme.

Après les succès le l'école italienne au XVI^e siècle, les mathématiciens se sont attachés à trouver des formules analogues pour les degrés suivants. Les réflexions sur cette question prennent un tour nouveau avec les travaux de LAGRANGE (1771), qui étudie les permutations des racines



Jérôme CARDAN (1501 - 1576)

♦ Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et P le polynôme défini par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^3 + az^2 + bz + c.$$

On observe que pour $h \in \mathbb{C}$,

$$P(z+h) = z^3 + (3h+a)z^2 + (3h^2+2ha+b)z + h^3 + ah^2 + bh + c.$$

Pour $h = -\frac{a}{3}$, on définit le polynôme Q par

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) \stackrel{\text{def}}{=} P(z+h) = z^3 + pz + q$$

où $p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{a^2}{3} + b$, $q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. On a alors

$$P(z) = 0 \iff Q(z-h) = 0.$$

La recherche des solutions de l'équation $P(z) = 0$ est ainsi ramenée au problème analogue pour l'équation $Q(z) = 0$.

d'une équation laissant invariantes certaines fonctions de ces racines. Ces idées sont approfondies par CAUCHY et RUFFINI. ABEL donne une démonstration rigoureuse de l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale de degré 5 en 1829. Enfin, en introduisant la notion de groupe, GALOIS énonce la condition générale à laquelle satisfait toute équation résoluble par radicaux (1831).

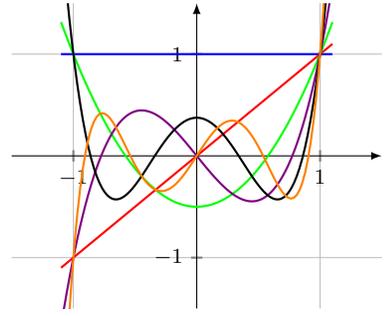
La distinction entre les nombres algébriques, racines d'un polynôme à coefficients entiers, et les autres qu'on nomme transcendants, date du XVII^e siècle, mais il faut attendre 1844 pour que LIOUVILLE démontre l'existence de nombres transcendants et plus longtemps encore pour que soit démontrée la transcendance de e (par HERMITE en 1872) et celle de π (par LINDEMANN en 1882).

Quant à la définition formelle des polynômes et à l'étude de leur structure, elles chemineront tout au long du XIX^e siècle au rythme lent du processus d'axiomatisation de l'algèbre : par exemple, DEDEKIND introduit la notion de corps et définit les idéaux vers 1870.

1.1 Polynômes de LEGENDRE

DÉFINITION 1.1.1 – Polynômes de LEGENDRE. On appelle famille des *polynômes de LEGENDRE* la suite de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$L_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$



Les premiers polynômes de LEGENDRE
Voir aussi...

EXERCICE 1.1.1

1. Montrer que $L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} [(X^2 - 1)^n]^{(n)}$. En déduire la parité de L_n et l'égalité $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $] -1; 1[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X^2 - 1)L_n''(X) + 2XL_n'(X) = n(n+1)L_n.$$

Source : [1] p. 25

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = x$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$L_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$L_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Pour montrer que $L_n(X)$ est scindé à racines simples dans $] -1; 1[$, raisonner par récurrence et penser à ROLLE. ◀

1.2 Polynômes de HILBERT

DÉFINITION 1.2.1 – Polynômes de HILBERT. On appelle famille des *polynômes de HILBERT* la suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$H_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}.$$

Voir aussi Polynômes de HILBERT dans la partie algèbre linéaire.

EXERCICE 1.2.1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. En déduire que le produit de n entiers consécutifs dans \mathbb{Z} est divisible par $n!$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$,

(ii) $\forall m \in \llbracket 0; n \rrbracket, Q(m) \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $Q = \sum_{k=0}^n \lambda_k H_k$.

Sources : [1] p.27, [2]

► **SOLUTION.**

◀

Lire [3] p. 297

1.3 Polynômes de BERNOULLI

Il arrive fréquemment que le calcul exact d'une intégrale soit difficile, voire impossible pour certaines fonctions et il est courant, dans ce cas, de chercher à approcher la valeur de l'intégrale en utilisant des polynômes comme les polynômes de BERNOULLI par exemple.

DÉFINITION 1.3.1 – Polynômes de BERNOULLI. Les *polynômes de BERNOULLI* forment l'unique suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{aligned}
 & B_0 = 1, \\
 & \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = (n+1)B_n, \\
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

DÉFINITION 1.3.2 – Nombres de BERNOULLI. Pour tout $n \geq 0$, on pose $b_n \stackrel{\text{def}}{=} B_n(0)$. La suite de réels $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des *nombres de BERNOULLI*.

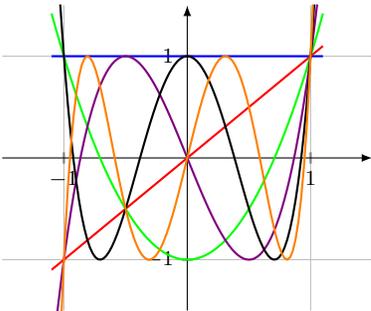
EXERCICE 1.3.1

- Déterminer le degré de $B_n(X)$ pour $n \geq 0$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

- En déduire, pour $n \geq 1$, une expression de b_n en fonction de b_0, \dots, b_{n-1} .
- Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels et que, pour $n \geq 0$, les polynômes $B_n(X)$ sont à coefficients rationnels.
- Montrer que pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n B_n(1-X) = B_n(X)$.
- En déduire que

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, b_{2n+1} = 0, \\ \forall n \geq 0, B_{2n+1}(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$



Polynômes de TCHEBYCHEV de première espèce

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

1.4 Polynômes de TCHEBYCHEV

DÉFINITION 1.4.1 – Polynômes de TCHEBYCHEV. Les *polynômes de TCHEBYCHEV* de première espèce sont les uniques polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ définis sur $] -1, 1[$ par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

Vérifions tout d'abord qu'une telle suite existe bien et qu'elle est unique.

■ **DÉMONSTRATION. Existence** Nous allons montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos \theta) &= \cos((n+2)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) \cos(\theta) - \sin((n+1)\theta) \sin(\theta) \\ &= T_{n+1}(\cos \theta) \cos(\theta) - \frac{1}{2} (\cos(n\theta) - \cos((n+2)\theta)) \\ T_{n+2}(\cos \theta) &= T_{n+1}(\cos \theta) \cos(\theta) - \frac{1}{2} T_n(\cos \theta) + \frac{1}{2} T_{n+2}(\cos \theta) \end{aligned}$$

d'où

$$T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n.$$

Unicité L'unicité de T_n pour n fixé est garantie par l'identification de deux polynômes coïncidant sur $] -1, 1[$.

□

PROPOSITION 1.4.1 – Formule de trigonométrie.

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

EXERCICE 1.4.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer une expression de T_n .

► **SOLUTION.**

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k.$$

◁

PROPOSITION 1.4.2 –

1. $\deg T_n = n$ et $\operatorname{cd} T_n = 2^{n-1}$
2. T_n est pair si n est pair et vice versa.
3. Pour tout n, m , $T_n \circ T_m = T_{nm}$.
4. $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$.
5. T_n admet n racines simples qui sont

$$a_{k,n} = \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right), \quad k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

6. Sur $[-1, 1]$, T_n admet $n+1$ extrema égaux à 1 en les points

$$b_{k,n} = \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right), \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

■ **DÉMONSTRATION.**

□

1.5 Polynômes scindés

Source : [1] p. 23

EXERCICE 1.5.1 Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que Q est scindé sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que $Q' + aQ$ l'est aussi.

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Si $a = 0$, appliquer le **théorème de ROLLE** sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où x_i et x_{i+1} sont deux racines réelles consécutives de Q .

1. Poser $\varphi : t \mapsto \exp(at)Q(t)$.
2. Démarche à revoir.

◀

1.6 Équation polynomiale

Source : [1] p. 20

EXERCICE 1.6.1 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X - 1).$$

1.7 Théorème de LUCAS

THÉORÈME 1.7.1 – LUCAS. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur à 2. Montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

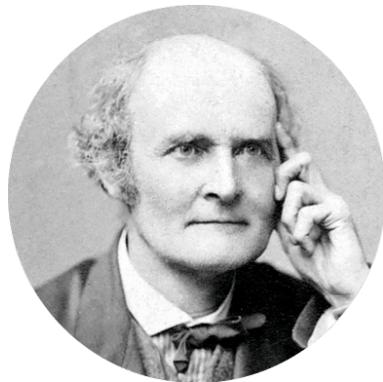
Au XVIII^e siècle se développent la résolution des systèmes linéaires et la théorie des déterminants. Les raisonnements suggèrent rapidement le concept d'espace à n dimensions. Mais il fallait oser un langage géométrique, alors qu'une interprétation sensible dans le plan ou l'espace faisait défaut pour $n > 3$.

De manière indépendante, CAYLEY en Angleterre et GRASSMAN en Allemagne franchissent le pas vers 1843-1845 et parlent d'espace à n dimensions. Le point de vue de CAYLEY est issu directement de la géométrie analytique : un vecteur d'un espace à n dimensions est un système de n réels ou n complexes. L'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire sont naturellement introduites par la généralisation de la dimension 3. Pour parvenir vraiment à la notion d'espace vectoriel, il faut dégager le concept de sous-espace et de dimension d'un sous-espace. C'est ce que fera GRASSMAN (professeur de lycée autodidacte en marge des milieux de la recherche) en cherchant à développer une analyse géométrique portant sur des calculs intrinsèques indépendants du choix des coordonnées. GRASSMAN introduit le produit extérieur de deux vecteurs, la définition de l'indépendance linéaire, de la dimension d'un espace et démontre la relation fondamentale

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim V \cap W.$$

Ces travaux eurent peu d'impact au début, mais ils furent repris par Henri POINCARÉ et Élie CARTAN (notamment son « algèbre extérieure » en géométrie différentielle).

C'est en 1888 que PEANO donnera la définition axiomatique d'un espace vectoriel réel. Jusqu'en 1930, le point de vue des matrices et des coordonnées prédomine par rapport au point de vue intrinsèque des espaces vectoriels.



Arthur CAYLEY (1821-1895)



Hermann GRASSMANN (1809-1877)

Faisons la transition entre le chapitre sur les polynômes et celui sur l'algèbre linéaire en revenant sur les polynômes de HILBERT.

2.1 Polynômes de HILBERT

PROPOSITION 2.1.1 – $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

La famille (H_0, \dots, H_n) des $n + 1$ premiers polynômes de HILBERT forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

LEMME 2.1.1 Toute famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés est libre.

Source : Polynômes à degrés échelonnés – Bibm@th.net

■ **DÉMONSTRATION.** Soit (P_1, \dots, P_n) une famille de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, i.e. $0 \leq \deg P_1 < \dots < \deg P_n$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0. \quad (\star)$$

Supposons par l'absurde que $\lambda_n \neq 0$. Alors le membre de gauche de l'égalité (\star) est un polynôme de degré $\deg P_n \neq -\infty$ puisque tous les polynômes sont supposés non nuls. Ce membre ne peut donc pas être le polynôme nul. On aboutit à une contradiction et $\lambda_n = 0$.

En itérant le raisonnement, on trouve successivement

$$\lambda_{n-1} = 0, \dots, \lambda_1 = 0$$

ce qui assure la liberté de la famille (P_1, \dots, P_n) . \square

Revenons à la démonstration de la 2.1.

■ **DÉMONSTRATION.** Par construction, la famille $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} (H_0, \dots, H_n)$ est échelonnée en degré ♦ ce qui assure sa liberté d'après le 2.1. De plus, $|\mathcal{H}| = \dim \mathbb{C}_n[X]$ donc la famille \mathcal{H} forme bien une base de $\mathbb{C}_n[X]$. \square

♦ Par définition,

$$H_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} X(X-1) \cdots (X-n+1).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg H_n = n$.

Source : extrait d'un cours de F. DELEBECQUE

2.2 Polynômes de LAGRANGE

2.2.1 Motivations de l'interpolation polynomiale

En analyse numérique, une fonction f inconnue explicitement est souvent connue seulement en certains points x_0, \dots, x_d , ou évaluable uniquement au moyen de l'appel à un code coûteux.

Mais dans de nombreux cas, on a besoin d'effectuer des opérations (dérivation, intégration, ...) sur la fonction f .

On cherche donc à reconstruire cette fonction f par une autre fonction f_r simple et facile à évaluer à partir des données discrètes de f . On espère que le modèle f_r ne sera pas trop éloigné de la fonction f aux autres points.

Pourquoi utiliser des polynômes pour reconstruire la fonction f ?

♦ cf. p. [...]

- **Le théorème d'approximation de WEIERSTRASS :** ♦
pour toute fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$
et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

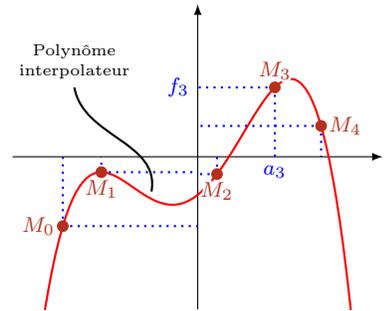
$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Plus ε est petit, plus le degré du polynôme est grand.

- **La simplicité de l'évaluation d'un polynôme par le schéma de HÖRNER :**

$$\sum_{j=0}^n c_j x^j = \left(\dots \left((c_n x + c_{n-1}) x + c_{n-2} \right) x + \dots c_1 \right) x + c_0.$$

Plus précisément, étant donnés $d + 1$ points d'abscisses distinctes $M_i \stackrel{\text{def}}{=} (a_i, f_i)$ pour $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ dans le plan, le problème de l'interpolation polynomiale consiste à trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à m dont le graphe passe par les $d + 1$ points M_i .



2.2.2 Interpolation lagrangienne

Les polynômes de LAGRANGE permettent d'interpoler une série de $n + 1$ points par un polynôme de degré n qui passe exactement par ces points.

THÉORÈME 2.2.1 – Propriété fondamentale des polynômes de LAGRANGE. Soient $n \in \mathbb{N}$ et (x_0, \dots, x_n) des complexes deux à deux distincts.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(x_j) = \delta_{i,j}. \quad \blacklozenge \quad (2.1)$$

DÉFINITION 2.2.1 – ♦ Symbole de KRONECKER.

$$\delta_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

■ **DÉMONSTRATION.** On considère $n + 1$ complexes deux à deux distincts, notés x_0, \dots, x_n . Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{aligned}$$

- ▷ Soit $P \in \text{Ker } \varphi$. Alors le polynôme P a $n + 1$ racines distinctes. Or il est de degré inférieur à n donc est le polynôme nul. On en déduit que φ est injective ce qui assure l'**unicité** des polynômes interpolateurs de LAGRANGE.
- ▷ Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ et que l'application φ est injective, c'est un isomorphisme ♦.
- ▷ En particulier, l'application φ est surjective ce qui assure l'**existence** de ces polynômes.

□

Source : [UT#2g] *Unicité des polynômes de LAGRANGE* – Øljen - Les maths en finesse

PROPOSITION 2.2.1 – ♦ Si f est une application linéaire d'un espace de dimension finie E dans un espace de dimension finie F avec $\dim E = \dim F$, il suffit que f soit injective ou surjective pour que f soit un isomorphisme.

DÉFINITION 2.2.2 – Polynômes de LAGRANGE. Soient $n \in \mathbb{N}$ et (x_0, \dots, x_n) des complexes deux à deux distincts. On appelle famille des *polynômes de LAGRANGE* la suite de polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2.1).

REMARQUE 2.2.1 Une famille de polynômes de LAGRANGE est définie à partir d'une famille de complexes deux à deux distincts.

PROPOSITION 2.2.2 – Expression des polynômes de LAGRANGE. Soient $n \in \mathbb{N}$ et (x_0, \dots, x_n) des complexes deux à deux distincts. Les polynômes de LAGRANGE associés à cette famille ont pour expression

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Source : [4]

■ **DÉMONSTRATION.**

▷ On considère $n + 1$ complexes deux à deux distincts, notés x_0, \dots, x_n .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le polynôme L_i est de degré au plus n et admet n complexes deux à deux distincts x_j pour racines, avec $j \neq i$. Alors, nécessairement, il existe une constante C telle que

$$L_i = C \prod_{i \neq j} (X - x_j).$$

L'égalité $L_i(x_i) = 1$ fournit $C = \left[\prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \right]^{-1}$ et donc

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

▷ Réciproquement, si pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on pose $L_i \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$,

alors le polynôme L_i est bien défini car les x_j sont deux à deux distincts, est bien de degré n et enfin les polynômes L_i vérifient clairement les égalités de dualité. □

2.2.3 Coordonnées d'un polynôme dans la base de LAGRANGE

PROPOSITION 2.2.3 – $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$. La famille (L_0, \dots, L_n) des $n + 1$ premiers polynômes de LAGRANGE forme une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

■ **DÉMONSTRATION.** Par construction, la famille $\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} (L_0, \dots, L_n)$ est échelonnée en degré ce qui assure sa liberté d'après le 2.1. De plus, $|\mathcal{L}| = \dim \mathbb{C}_n[X]$ donc la famille \mathcal{L} forme bien une base de $\mathbb{C}_n[X]$. □

THÉORÈME 2.2.2 – Interpolation lagrangienne. Soient $n \in \mathbb{N}$ et (x_0, \dots, x_n) des complexes deux à deux distincts et (y_0, \dots, y_n) des complexes deux à deux distincts.

Il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

Ce polynôme à pour expression dans la base des polynômes de LAGRANGE associ

$$P = \sum_{i=0}^n y_i L_i = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i.$$

Source : [4]

2.2.4 Lien avec les déterminants de VANDERMONDE

En appliquant la formule des coordonnées d'un polynôme de degré au plus n dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ au cas particulier où le polynôme P est l'un des éléments de la base canonique $(X^j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $\mathbb{C}_n[X]$, on

obtient $\sum_{i=0}^n L_i = 1$ et plus généralement,

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^j = \sum_{i=0}^n x_i^j L_i.$$

Ainsi,

PROPOSITION 2.2.4 – . La matrice de passage de la base $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ à la base $(X^j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la matrice de VANDERMONDE associée à la famille $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

$$\text{Mat}_{(L_i)_0^n, (X^j)_0^n} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

2.3 Matrice de VANDERMONDE

DÉFINITION 2.3.1 – Matrice de VANDERMONDE. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de complexes. On définit la *matrice de VANDERMONDE* de la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On considère ici une matrice de VANDERMONDE carrée.

REMARQUE 2.3.1 Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de complexes. Les matrices de VANDERMONDE des familles $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ pour $2 \leq k \leq n$ sont imbriquées les unes dans les autres de la manière suivante

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \dots$$

PROPOSITION 2.3.1 – Déterminant de VANDERMONDE.

$$\det(V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

■ **DÉMONSTRATION.** Nous allons raisonner par récurrence sur la taille de la matrice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\mathcal{P}_n : \llcorner \text{ Soit } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \det(V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \llcorner.$$

- ▷ L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.
 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose \mathcal{P}_n vraie, montrons \mathcal{P}_{n+1} .
 Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ une famille de complexes.

$$\text{On pose } P(X) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j) \stackrel{\text{def}}{=} X^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k.$$

D'après les propriétés du déterminant, en ajoutant les n premières colonnes respectivement multipliée par p_k à la dernière, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{c|c} V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \begin{array}{c} \alpha_1^n \\ \vdots \\ \alpha_n^n \end{array} \\ \hline 1 & \alpha_{n+1}^{n-1} \cdots \alpha_{n+1}^n \end{array} \right| = \\ & = \\ & = \det(V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) P(\alpha_{n+1}) \\ \text{par hypothèse de récurrence} & = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \times \prod_{j=1}^n (\alpha_{n+1} - \alpha_j) \\ \det(V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})) & = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i). \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ et on en déduit par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

COROLLAIRE 2.3.1 La famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est libre si et seulement si le déterminant de sa matrice de VANDERMONDE est non nul.

■ **DÉMONSTRATION.** D'après la 2.3, la matrice de VANDERMONDE de la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est inversible si et seulement si les α_i sont distincts deux à deux. □

EXERCICE 2.3.1 Pour $a \in \mathbb{C}$, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{ax}$. Soit (a_1, \dots, a_n) , n complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille de fonctions $(f_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

► **SOLUTION.**

Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k} = 0$. Alors,

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^n \lambda_k f_{a_k}^{(p)} = 0,$$

$$\text{soit } \forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p e^{a_k x} = 0,$$

$$\text{pour } x = 0 \forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k^p = 0.$$

Les n dernières égalités écrites constituent un système (\mathcal{S}) de n équations linéaires à n inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le déterminant de ce système est $V(a_1, \dots, a_n)$ et ce déterminant est non nul car les a_k sont deux à deux distincts. Par suite, (\mathcal{S}) est un système de CRAMER homogène. Le système (\mathcal{S}) admet donc l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et on a ainsi montré la liberté de la famille $(f_{a_k})_{1 \leq k \leq n}$. \triangleleft

2.3.1 Inverse de la matrice de VANDERMONDE

EXERCICE 2.3.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (x_1, \dots, x_n) des complexes deux à deux distincts.

1. Montrer que l'application

$$\varphi: \begin{matrix} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{matrix}$$

est un isomorphisme. Montrer que sa matrice dans les bases canoniques de départ et d'arrivée est

$$M_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. On note $L_1(X), \dots, L_n(X)$ les polynômes interpolateurs de LAGRANGE associés à x_1, \dots, x_n . Donner une relation entre les coefficients de $M_n(x_1, \dots, x_n)^{-1}$ et ceux des polynômes $L_i(X)$.

Source : [1] p.81

2.4 Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

DÉFINITION 2.4.1 – Centre (algèbre). Le centre d'une structure algébrique est l'ensemble des éléments de cette structure qui commutent avec tous les autres éléments.

PROPOSITION 2.4.1 – Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB = BA$, est égal à l'ensemble des matrices scalaires.

Nous voulons démontrer l'égalité de deux ensembles à savoir le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$. Nous allons donc raisonner par double inclusion.

■ **DÉMONSTRATION.** (C) Posons $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Si la matrice A appartient au centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors, en particulier, elle commute avec les matrices élémentaires \diamond i.e.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, AE_{i,j} = E_{i,j}A.$$

DÉFINITION 2.4.2 – \diamond Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille (n, p) dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en ligne i , colonne j , qui est égal à 1. Autrement

En décomposant la matrice A dans la base des matrices élémentaires on obtient

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j},$$

et

$$E_{i,j}A = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} a_{k,\ell} E_{i,j} E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} E_{i,\ell}.$$

Puisque la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est libre, on peut identifier les coefficients des deux expressions et on déduit que pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq k$, $a_{i,k} = 0$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Ainsi, si la matrice A commute avec toutes les matrices, elle est nécessairement de la forme $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

(\Leftarrow) Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \times (\lambda I_n) = (\lambda I_n) \times B$.

On en déduit par double inclusion que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égal à l'ensemble des matrices scalaires. \square

MÉTHODE 2.4.1 Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie « pour toute matrice », il est parfois utile de prendre des cas particuliers comme les **matrices élémentaires** pour en déduire des informations sur les coefficients.

2.5 Semblables sur \mathbb{C} , sur \mathbb{R}

PROPOSITION 2.5.1 – Deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

■ **DÉMONSTRATION.** Soient A et B deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice $P \stackrel{\text{def}}{=} P_r + iP_i \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$ soit $AP_r + iP_iA = P_rB + iP_iB$ et donc en identifiant parties réelle et imaginaire,

$$AP_r = P_rB \text{ et } AP_i = P_iB.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(P_r + xP_i) = (P_r + xP_i)B$. On pose la fonction

$$\delta: z \in \mathbb{C} \mapsto \det(P_r + zP_i).$$

La fonction δ est polynomiale et est non identiquement nulle car $\delta(i) = \det(P) \neq 0$. On en déduit qu'il existe un réel x_0 tel que $\delta(x_0) = \det(P_r + x_0P_i) \neq 0$.

Ainsi, en posant $\tilde{P} \stackrel{\text{def}}{=} P_r + x_0P_i \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ on obtient $A = \tilde{P}B\tilde{P}^{-1}$. \square

REMARQUE 2.5.1 Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on en déduit que deux matrices sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si elle le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.5.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_A est scindé sur \mathbb{R} . Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et

seulement si elle l'est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.6 Noyaux itérés

PROPOSITION 2.6.1 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$.

- La suite $(\text{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion et stationnaire à partir d'un certain rang $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- La suite $(\text{Im}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion et stationnaire à partir du même rang r .

(la suite vient de [Noyaux itérés – Bibm@th.net](#))

De plus

$$\text{Ker}(f^r) \oplus \text{Im}(f^r) = E.$$

Si on note $d_k \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{Ker}(f^k))$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{k+1} - d_k \geq d_{k+2} - d_{k+1},$$

autrement dit la suite de la différence des dimensions entre deux noyaux itérés consécutifs est décroissante.

Voir aussi énoncé de [1] p. 44.

■ **DÉMONSTRATION.** — La monotonie des deux suites est triviale.

— Bien préciser l'existence de r en dimension finie.

Soit r le rang de stationnarité de la suite des noyaux itérés. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+k})$.

D'après le premier item, l'une des deux inclusions est vérifiée par croissance de la suite des noyaux itérés. Montrons la deuxième. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \text{Ker}(f^{r+k+1})$. Alors $f^{r+k+1}(x) = f^{r+1}(f^k(x)) = 0$ soit $f^k(x) \in \text{Ker}(f^{r+1}) = \text{Ker}(f^r)$. Ainsi, $f^{r+k}(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(f^{r+k})$.

— Montrons que $\text{Ker}(f^r) \oplus \text{Im}(f^r) = E$.

D'après le théorème du rang, $\text{Rg}(f^r) + \dim \text{Ker}(f^r) = n$. Il reste à montrer que $\text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r) = \{0\}$.

Soit $y \in \text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. De plus, $f^r(y) = 0$ donc, en remplaçant y par son expression, $f^{2r}(x) = 0$ i.e. $x \in \text{Ker}(f^{2r})$, qui est égal à $\text{Ker}(f^r)$ par définition de r . On en déduit que $y = f^r(x) = 0$. Ainsi $\text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r) = \{0\}$ et on a bien

$$\text{Ker}(f^r) \oplus \text{Im}(f^r) = E.$$

□

REMARQUE 2.6.1 La propriété de somme directe, n'est plus valable dans le cas d'un espace vectoriel de dimension infinie. En effet, dans $\mathbb{R}[X]$, l'application *dérivée* met en défaut cette égalité.

EXERCICE 2.6.1 Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(f^k)$ et $I_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(f^k)$

puis $N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ et $I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$. (N est le nilspace de f et I le coeur de f).

1. a) Montrer que les suites $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.
- b) Montrer que N et I sont stables par f .
- c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(N_k = N_{k+1}) \implies (N_{k+1} = N_{k+2}).$$

2. On suppose de plus que $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Soit

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$$

$$\text{et } B \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid I_k = I_{k+1}\}.$$

Montrer qu'il existe un entier p inférieur à n tel que $A = B = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq p\}$.

- b) Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.
- c) Montrer que $f|_N$ est nilpotent et que $f|_I \in \text{GL}(I)$.
3. Trouver des exemples où A est vide et B est non vide et où A est non vide et B est vide.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_k \stackrel{\text{def}}{=} \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire le sens de variation de la suite $(\dim N_{k+1} - \dim N_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

2.7 Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit

DÉFINITION 2.7.1 – Forme multiplicative. Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} . L'application f est dite *multiplicative* si pour tout matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

EXERCICE 2.7.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une forme multiplicative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} autre que les constantes 0 et 1. Montrer que $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $f(M) \neq 0$.

Source : [1] p. 53

2.8 Matrices compagnon

DÉFINITION 2.8.1 – Matrice compagnon. Soit P le polynôme définit par

$$P(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^p + \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k \in \mathbb{K}[X].$$

On appelle *matrice compagne* de P la matrice

$$C_P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{p-1} \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 2.8.1 – Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme P est égal au polynôme caractéristique de sa matrice compagne :

$$\chi_{C_P}(X) = P(X).$$

■ **DÉMONSTRATION.** Par définition,

$$\chi_{C_P}(X) = \det(XI_p - C_P) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & c_0 \\ -1 & X & & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & c_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X + c_{d-1} \end{vmatrix}.$$

Notons $D_p(X, c_0, \dots, c_{p-1})$ ce déterminant.

Le $(1, 1)$ -cofacteur de $(XI_p - C_P)$ est $D_{p-1}(X, c_1, \dots, c_{p-1})$ et son $(1, p)$ -cofacteur est $(-1)^{p+1}\delta$ où δ est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure de taille $d-1$ et dont tous les éléments valent -1 ; ainsi $\delta = (-1)^{p-1}$ et ce $(1, p)$ -cofacteur vaut 1.

Le développement du déterminant $D_p(X, c_0, \dots, c_{p-1})$ par rapport à sa première ligne fournit donc la relation :

$$D_p(X, c_0, \dots, c_{p-1}) = XD_{p-1}(X, c_1, \dots, c_{p-1}) + c_0.$$

Comme $D_1(X, c_{p-1}) = X + c_{p-1}$,

$$\det(XI_p - C_P) = X \left(X \left(\cdots \left(X(X + c_{p-1}) + c_{p-2} \right) \cdots \right) + c_1 \right) + c_0.$$

On reconnaît la construction de P par le schéma de HÖRNER. Ainsi le polynôme caractéristique de C_P n'est autre que P . □

DÉFINITION 2.8.2 – Cofacteurs. [5] ch4 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la ligne i et la colonne j .

- Le *mineur* d'indice i, j de la matrice A est $\Delta_{i,j}$.
- Le *cofacteur* d'indice i, j de la matrice A est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

PROPOSITION 2.8.1 – Développement selon une ligne / colonne. Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}.$$

2.8.1 Endomorphisme cyclique

DÉFINITION 2.8.3 – Endomorphisme cyclique. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit u un endomorphisme de E . On dit que u est *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

Les endomorphismes cycliques admettent des matrices particulières dans la base précédente :

PROPOSITION 2.8.2 – Soit u un endomorphisme de E . Alors u est cyclique si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice compagne de son polynôme caractéristique.

Source : Endomorphisme cyclique – Bibm@th.net

PROPOSITION 2.8.3 – Soit f un endomorphisme cyclique. Tout endomorphisme qui commute avec f est un polynôme en f .

Source : [1] p. 58

■ **DÉMONSTRATION.** Tous les polynômes en f commutent avec f . Réciproquement, on va montrer que seuls les polynômes en f commutent avec f . On note $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (e_0, \dots, e_{n-1})$ la base dans laquelle f admet pour matrice la matrice compagnon de son polynôme caractéristique (qui existe d'après [lien](#)). Par définition, on a donc :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(e_p) = e_{p+1}. \quad (\star)$$

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Le vecteur $g(e_0)$ se décompose sur la base \mathcal{B} :

$$\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n, g(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_k.$$

Nous allons montrer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$. Pour cela, nous allons prouver que :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g(e_p) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \right) (e_p)$$

par récurrence sur p : l'égalité proviendra du fait que les deux applications linéaires $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et g coïncident sur une base.

▷ On a $f^k(e_0) = e_k$ par récurrence immédiate sur $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a donc

$$g(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e_0).$$

▷ Supposons que $0 \leq p \leq n-2$ et que $g(e_p) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e_p)$. On compose par f , qui est linéaire : $(f \circ g)(e_p) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f \circ f^k(e_p)$.

On utilise l'hypothèse de commutativité :

$$(g \circ f)(e_p) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f(e_p)).$$

Cela s'écrit, grâce à (\star) : $g(e_{p+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(e_{p+1})$. La récurrence est établie et $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.

Tout endomorphisme qui commute avec f est donc un polynôme en f . Ainsi l'ensemble des endomorphismes commutant avec f est :

$$\text{Vect} \left(\text{Id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1} \right),$$

on retrouve ainsi que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

□

2.8.2 Théorème de CAYLEY-HAMILTON

THÉORÈME 2.8.2 – CAYLEY-HAMILTON. Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Source : note de [6]

En recherchant l'inverse d'un quaternion, William HAMILTON démontre, en 1853, le résultat pour la dimension 4 sans vraiment l'exprimer. Arthur CAYLEY énonce le résultat pour de matrices carrées d'ordre n , le démontre pour $n = 2$, prétend l'avoir fait pour $n = 3$ et dit qu'il ne lui semble pas nécessaire de le démontrer dans le cas général ... Georg FROBENIUS fournit la première démonstration générale en 1878.

L'exercice suivant, issu du premier sujet de l'agrégation interne de 2022, démontre ce résultat. Cette preuve est basée sur le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon et de l'étude du plus petit sous-espace stabilisé par une matrice et contenant un vecteur donné.

EXERCICE 2.8.1 Soit p un entier strictement positif et soit M une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Étant donné un élément x quelconque non nul de \mathbb{C}^p on pose

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ r \geq 1 \mid (x, Mx, \dots, M^r x) \text{ est liée dans } \mathbb{C}^p \right\}.$$

1. Montrer qu'il existe un élément $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1})$ de \mathbb{C}^μ et une matrice N de $\mathcal{M}_{p-\mu}(\mathbb{C})$ tels que la matrice M soit semblable à une matrice M' de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 & \star \\ 1 & 0 & & \vdots & -\alpha_1 & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -\alpha_{\mu-2} & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{\mu-1} & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

où les \star représentent des lignes d'éléments de \mathbb{C} et les O représentent des colonnes nulles.

2. Montrer que $\chi_M(M)x = 0$.
3. Montrer que χ_M est un polynôme annulateur de M .

► SOLUTION.

Source : Correction de la RMS 132 3

1. — La famille $(x, Mx, \dots, M^p x)$ est un système de $p + 1$ vecteurs de \mathbb{C}^p d'un espace vectoriel de dimension p . Il est donc lié. Il existe donc μ , minimum de r tel que $(x, Mx, \dots, M^r x)$ est lié et $\mu \leq p$.
— Par construction, la famille $(x, Mx, \dots, M^{\mu-1} x)$ est libre et $(x, Mx, \dots, M^{\mu-1} x, M^\mu x)$ est liée. Il en résulte une égalité :

$$M^\mu(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 Mx + \cdots + \alpha_{\mu-1} M^{\mu-1} x$$

pour un unique μ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1})$ de \mathbb{C}^μ .

— Notons $f: x \mapsto Mx$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^p et

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect}(x, Mx, \dots, M^{\mu-1}x);$$

l'application f envoie chaque $M^i x$, pour $0 \leq i \leq \mu - 1$, sur un élément de V . Ainsi V est stabilisé par f . Notons $e_1 \stackrel{\text{def}}{=} x, e_2 \stackrel{\text{def}}{=} Mx, \dots, e_\mu \stackrel{\text{def}}{=} M^{\mu-1}x$. Le système (e_1, \dots, e_μ) est une base de V . Complétons ce système par $(e_{\mu+1}, \dots, e_p)$ tels que (e_1, \dots, e_p) est une base de \mathbb{C}^p .

$$f(e_1) = e_2, \dots, f(e_{\mu-1}) = e_\mu, f(e_\mu) = -\alpha_{\mu-1}e_{\mu-1} - \dots - \alpha_0 e_1.$$

— Notons Π le polynôme $X^\mu + \alpha_{\mu-1}X^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$. La matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_p) est une matrice

$$M' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C_\Pi & L \\ O & N \end{pmatrix}. \text{ Elle est bien du type voulu.}$$

La matrice M' est semblable à M car M et M' représentent toutes deux f , l'une dans la base canonique et l'autre dans la base des e_i .

2. On a $\Pi(M)x = M^\mu x - \alpha_{\mu-1}M^{\mu-1}x - \dots - \alpha_0 x$. Or d'après Section 2.8 on page 19, on d'une part $\Pi = \chi_{C_\Pi}$ et d'autre part

$$XI_p - M' = \begin{pmatrix} XI_\mu - C_\Pi & -L \\ O & XI_{p-\mu} - N \end{pmatrix}.$$

Donc $\det(XI_p - M') = \det(XI_\mu - C_\Pi) \det(XI_{p-\mu} - N)$. Ainsi Π divise $\chi_{M'}$ et comme M' est semblable à M , $\chi_M = \chi_{M'}$. Il en résulte : $\chi_M(M)x = 0$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}^p$, on a $\chi_M(M)x = 0$ c'est-à-dire que $\chi_M(M)$ est la matrice nulle.

◁

2.9 Caractérisation des homothéties

PROPOSITION 2.9.1 – Caractérisation des homothéties. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application f est une homothétie si et seulement si la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$.

■ **DÉMONSTRATION.** Raisonnons par double implication.

(\Rightarrow) On suppose que l'application f est une homothétie. Alors il existe un scalaire non nul λ tel que pour tout $x \in E, f(x) = \lambda x$. Ainsi, la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$.

(\Leftarrow) On suppose que la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$. On pose

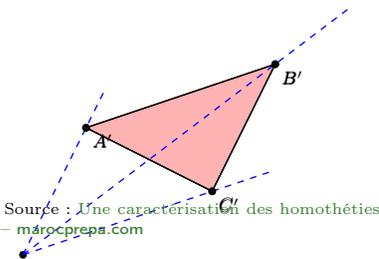
$$f: x \mapsto \lambda_x x.$$

Soient $y \in E$ non nul et $x \in E$. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$ ce qui assurera que f est une homothétie.

Distinguons deux cas :

— **Cas où** $x \in \text{Vect}(y)$. Alors il existe un scalaire non nul λ tel que $x = \lambda y$. En composant cette relation par f on obtient

$$f(x) = \lambda f(y)$$



Source : Une caractérisation des homothéties
- matocprepa.com

soit : $\lambda_x x = \lambda \lambda_y y$,
 en remplaçant x : $\lambda_x \lambda y = \lambda \lambda_y y$,
 en factorisant : $\lambda(\lambda_x - \lambda_y)y = 0$.

Or $\lambda \neq 0$ et $y \neq 0_E$ donc nécessairement $\lambda_x = \lambda_y$.

- **Cas où $x \notin \text{Vect}(y)$.** On pose $z \stackrel{\text{def}}{=} x + y$. Par définition de l'application f , $f(z) = \lambda_z z$ soit $f(z) = \lambda_z(x + y)$. On peut aussi écrire $f(z) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. En égalant ces deux expressions, on obtient

$$(\lambda_x - \lambda_z)x + (\lambda_y - \lambda_z)y = 0$$

et par liberté de la famille (x, y) , on aboutit à $\lambda_x = \lambda_y$. □

2.10 Inversion par sommation géométrique des endomorphismes nilpotents

EXERCICE 2.10.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent. Montrer que $\text{Id}_E - u$ est bijective et déterminer son inverse.

► **SOLUTION.** D'après le cours sur la réduction des endomorphismes, $u^n = 0$. Alors, comme Id_E et u commutent,

$$\text{Id}_E - u^n = (\text{Id}_E - u) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \right).$$

On en déduit que $\text{Id}_E - u$ est inversible et que

$$(\text{Id}_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

◁

PROPOSITION 2.10.1 – Formule de BERNOULLI.

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Un résultat analogue : [cite : Fred JEAN]

PROPOSITION 2.10.2 – Série de NEUMANN. Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A < 1$, alors la matrice $\text{I}_n - A$ est inversible.

■ **DÉMONSTRATION.** En effet, pour une telle matrice A , la série $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente (car normalement convergente). En faisant alors tendre p vers l'infini dans l'identité

$$\left(\sum_{k=0}^p A^k \right) (\text{I}_n - A) = (\text{I}_n - A) \left(\sum_{k=0}^p A^k \right) = \text{I}_n - A^{p+1},$$

on obtient que la matrice $I_n - A$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$, puisque $A^p \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$. \square

2.11 Matrices de taille 3 d'ordre de nilpotence égal à 2

EXERCICE 2.11.1 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Source : énoncé de [7]

► SOLUTION.

- ▷ Si M est la matrice nulle, elle est solution de l'équation.
- ▷ Supposons que M n'est pas la matrice nulle. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à M . Comme M est non nulle, existe donc un vecteur x tel que $\varphi(x) \neq 0$. Par le théorème du rang,

$$\text{Rg } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = 3.$$

Comme $M^2 = 0$, $\text{Im } \varphi \subset \text{Ker } \varphi$ et donc $\text{Rg } \varphi \leq \dim \text{Ker } \varphi$ et comme $\text{Rg } \varphi \geq 1$ (car $M \neq 0$), nécessairement,

$$\text{Rg } \varphi = 1 \text{ et } \dim \text{Ker } \varphi = 2.$$

Comme $\varphi(x) \in \text{Ker } \varphi$, il existe $z \in \text{Ker } \varphi$ tel que la famille $\{\varphi(x), z\}$ est une base de $\text{Ker } \varphi$.

Montrons que la famille $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{x, \varphi(x), z\}$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que

$$\alpha x + \beta \varphi(x) + \gamma z = 0.$$

En composant cette relation par φ on obtient immédiatement $\alpha = 0$ car $z \in \text{Ker } \varphi$ et $\varphi^2 = 0$. La liberté de la famille $\{\varphi(x), z\}$ permet de conclure.

La matrice de φ dans cette base est $A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices solutions sont donc dans l'ensemble

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{0\} \cup \{P^{-1}AP, P \in \text{GL}_3(\mathbb{K})\} \right\}.$$

- ▷ Réciproquement, comme $A^2 = 0$, toutes les matrices de \mathcal{S} sont nilpotentes d'ordre 2.

Finalement l'ensemble des solutions est \mathcal{S} . \triangleleft

2.12 Famille libre engendrée par un endomorphisme nilpotent

EXERCICE 2.12.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre de nilpotence égal à $p > 1$. Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel

que la famille $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
En déduire que $p \leq n$.

- **SOLUTION.** — Justifions tout d'abord l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Par définition, l'ordre de nilpotence p est le plus petit entier tel que f^p est l'endomorphisme nul. Ainsi f^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul et il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
- Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0. \quad (*)$$

L'objectif est de montrer que les λ_i sont tous nuls. Pour cela nous allons composer cette relation par une succession d'applications qui permettront d'isoler chacun des coefficients et de conclure sur leur nullité.

En composant la relation (*) par f^{p-1} on obtient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k f^{k+p-1}(x_0) = 0.$$

Or l'endomorphisme f est nilpotent d'ordre p donc le deuxième terme est nul et comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$.

En composant la relation (*) successivement par f^{p-k} pour $k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$ on obtient $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{p-1} = 0$.

Finalement, la famille \mathcal{F} est libre.

- Nous venons de construire une famille libre de p éléments dans un espace de dimension n donc $p \leq n$.

◁

On tire de cet exercice un résultat intéressant :

PROPOSITION 2.12.1 – Majoration de l'ordre de nilpotence.

Considérons un endomorphisme nilpotent sur un espace E de dimension finie ; son ordre de nilpotence est majoré par la dimension de l'espace E .

2.13 Matrices de rang 1

PROPOSITION 2.13.1 – Caractérisation des matrices de

rang 1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux matrices colonnes non nulles (pas nécessairement uniques) $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = XY^\top$.

- **DÉMONSTRATION.** (\Rightarrow) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une matrice de rang 1. On note C_1, \dots, C_p ses colonnes. L'hypothèse $\text{Rg } A = 1$ se traduit par le fait que les colonnes de la matrice A sont proportionnelles. Autrement dit, il existe un vecteur $X \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \dots x_n)^\top$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tous non nuls tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, C_k = \lambda_k X.$$

En posant $Y \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1 \cdots \lambda_p)^\top$, on peut écrire $A = XY^\top$.

(\Leftarrow) Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, deux matrices colonnes non nulles.

On note $Y \stackrel{\text{def}}{=} (y_1 \cdots y_p)^\top$ où aucun des y_i n'est nul. Alors,

$$XY^\top = X \times (y_1 \cdots y_p) = [y_1 X \cdots y_p X]$$

Les colonnes de la matrice résultante sont proportionnelles donc cette matrice est de rang égal à 1.

□

REMARQUE 2.13.1 Il n'y a pas unicité du couple (X, Y) . En effet si ce couple convient, le couple $(2X, \frac{1}{2}Y)$ convient aussi.

EXERCICE 2.13.1 Soit A une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

► **SOLUTION.** D'après Section 2.13 on the previous page, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = XY^\top$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A^2 &= (XY^\top)(XY^\top) \\ &= X \underbrace{(Y^\top X)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \lambda \in \mathbb{K}} Y^\top \\ A^2 &= \lambda A \end{aligned}$$

De plus $\lambda = \text{Tr } A$.

◀

Compléter avec le problème 2 Partie I de CCINP PSI 2022.

EXERCICE 2.13.2

1. Montrer que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr } A \neq 0$.
3. Montrer que si $\text{Tr } A \neq 0$, alors la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\text{Diag}(0, \dots, 0, \text{Tr } A)$.
4. On suppose que $\text{Tr } A = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A .
 - a) Montrer que $U \in \text{Ker } f$ et justifier l'existence d'une base de $\text{Ker } f$ de la forme (E_1, \dots, E_{n-2}, U) .
 - b) Soit $W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V^\top V} V$. Montrer que $(E_1, \dots, E_{n-2}, U, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
 - c) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

► **SOLUTION.**

◀

2.14 Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes

EXERCICE 2.14.1 Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

► **SOLUTION.** On note

\mathcal{N} l'ensemble des matrices nilpotentes,
 \mathcal{T} l'ensemble des matrices de trace nulle.

Nous allons montrer que $\text{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}$.

L'ensemble \mathcal{T} est le noyau de la forme linéaire non nulle qu'est la *trace*, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est de dimension $n^2 - 1$.

Raisonnons par double inclusion.

DÉFINITION 2.14.1 – Hyperplan. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Un sous-espace vectoriel H de E est un *hyperplan* de E si $\dim H = n - 1$.

THÉORÈME 2.14.1 – Hyperplan & Formes linéaires. Si φ est une forme linéaire sur E non nulle, alors $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .

(C) Comme le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à 0, toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls. La *trace* étant un invariant de similitude, toute matrice nilpotente est de trace nulle.

On en déduit le même résultat sur la trace de toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

(D) Les matrices E_{ij} de la base canonique avec $i \neq j$ sont nilpotentes d'ordre 2. Ces matrices engendrent l'espace des matrices de diagonale nulle. Il nous reste donc à obtenir l'espace des matrices diagonales de trace nulle. L'ensemble \mathcal{T} est engendré par

$$\left\{ E_{k\ell} + E_{ii} - E_{jj} \mid k \neq \ell, i \neq j \right\}.$$

Les matrices $E_{ii} - E_{jj}$ avec $i \neq j$ engendrent l'espace des matrices diagonales de trace nulle. Ces matrices ne sont pas nilpotentes mais on va pouvoir les obtenir comme combinaisons linéaires de matrices nilpotentes.

Regardons déjà le cas $n = 2$. Une matrice nilpotente de trace nulle avec 1 et -1 sur la diagonale, doit être de rang 1. On constate effectivement que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est bien nilpotente. Construisons

une matrice analogue de taille n .

Pour $2 \leq i \leq n$, considérons alors la matrice

$$F_i \stackrel{\text{def}}{=} E_{11} - E_{1i} + E_{i1} - E_{ii}.$$

Cette matrice étant de rang égal à 1, d'après Section 2.13 on the facing page $F_i^2 = \text{Tr}(F_i)F_i = 0$ puisque $\text{Tr}(F_i) = 0$. Les matrices F_i sont donc nilpotentes.

Ainsi l'espace $\text{Vect}(\mathcal{N})$ contient $F_i + E_{1i} - E_{i1} = E_{11} - E_{ii}$ pour $2 \leq i \leq n$ et donc l'espace des matrices diagonales de trace nulle.

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Source : [8] p. 12

On a ainsi montré que $\text{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}$.

◁

2.15 Produit de matrices nilpotentes commutantes

Source : [5]

EXERCICE 2.15.1 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

1. On suppose que B est nilpotente.
 - a) Montrer que $A + B$ est inversible si et seulement si A est inversible.
 - b) Montrer que $\det(A + B) = \det(A)$.
2. Soient A_1, \dots, A_n des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Montrer que $A_1 \times \dots \times A_n = 0$.

Source : [4] Planche no 5. Réduction. Corrigé

► **SOLUTION.**

▷ Si u est inversible,

$$\det(u + v) = \det(u) \Leftrightarrow \det(u) \times \det(\text{Id} + u^{-1}v) = \det(u) \Leftrightarrow \det(\text{Id} + u^{-1}v)$$

Les endomorphismes u et v commutent et donc u^{-1} et v également ♦. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w \stackrel{\text{def}}{=} u^{-1}v$ l'est également. Il reste donc à calculer $\det(\text{Id} + w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(\text{Id} + w) = (-1)^n \chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w = X^n$ puis $\det(\text{Id} + w) = 1$. Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible.

▷ Si u n'est pas inversible, $u + x\text{Id}$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v . Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u + x\text{Id} + v) = \det(u + x\text{Id})$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u + v) = \det u$.

◁

► **SOLUTION.** 1. Comme les matrices A et B commutent, elles sont cotrigonalisables (lien vers l'exercice correspondant). De plus comme la matrice B est nilpotente, dans toute base dans laquelle elle est triangulaire, sa diagonale est nulle (le spectre d'une matrice nilpotente est réduit à 0). Ainsi dans une base de cotrigonalisation des matrices $A + B$ et A , leur diagonale sont égales et donc leur déterminant (qui sont égaux au produit des termes diagonaux).

2. Comme les matrices A_1, \dots, A_n sont trigonalisables et commutent, elles sont cotrigonalisables : il existe donc T_1, \dots, T_n triangulaires supérieures strictes et P inversible telles que $A_i = PT_i P_i^{-1}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrons par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ que les coefficients en position (i, j) avec $i \geq j - k + 1$ de la matrice $T_1 \cdots T_k$ sont nuls.

- Pour $k = 1$, il s'agit simplement de la définition d'une matrice triangulaire supérieure stricte.
- Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ telle que les coefficients en position (i, j) avec $i \geq j - k + 1$ de la matrice $T_1 \cdots T_k$ sont nuls.

Source : [9] $\lambda_1^{p. 117.}$

$$A+B \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit (i, j) tel que $i \geq j - k$. Avec des notation évidentes,

$$[T_1 \cdots T_{k+1}]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n [T_1 \cdots T_k]_{i,\ell} [T_{k+1}]_{\ell,j}$$

comme $T_{k+1} \in \mathcal{F}_n^{++} = \sum_{\ell=1}^{j-1} [T_1 \cdots T_k]_{i,\ell} [T_{k+1}]_{\ell,j}$

$$= 0, \text{ car } i \geq \ell - k + 1.$$

La récurrence est terminée et l'on en déduit en considérant le cas $k = n$ que la matrice $T_1 \cdots T_n$ est nulle. En conclusion,

$$A_1 \cdots A_n = P T_1 \cdots T_n P^{-1} = 0.$$

Deuxième démonstration :

LEMME 2.15.1 Soit u et n deux endomorphismes de E tels que u est non nul, n est nilpotent et $u \circ n = n \circ u$. Montrer que $\text{Rg}(u \circ n) < \text{Rg}(u)$.

Source : [9] p. 33

■ **DÉMONSTRATION.** Comme u et n commutent, n laisse stable $\text{Im } u$. Notons \tilde{n} l'endomorphisme induit par n sur $\text{Im } u$. Comme n est nilpotent, \tilde{n} est également nilpotent et donc, en particulier, non inversible.

La formule du rang appliquée à \tilde{n} donne alors :

$$\text{Rg } u = \dim \text{Im } u = \text{Rg } \tilde{n} + \dim \text{Ker } \tilde{n} > \text{Rg } \tilde{n}.$$

On conclut en remarquant que $\text{Im } \tilde{n} = n(\text{Im } u) = \text{Im}(n \circ u)$. ◁

Revenons à la démonstration du résultat.

Soit A_1, \dots, A_n des matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. On suppose qu'elles sont toutes non nulles car si ça n'est pas le cas, le résultat est immédiat.

D'après le lemme,

$$0 \leq \text{Rg}(A_1 \cdots A_n) < \text{Rg}(A_1 \cdots A_{n-1}) < \cdots < \text{Rg}(A_1) < n.$$

Donc $\text{Rg}(A_1 \cdots A_n) = 0$ et $A_1 \cdots A_n$ est la matrice nulle. ◁

2.16 Si $AB - BA = A \dots$

EXERCICE 2.16.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^p) = 0$.

Source : Exercices de J.-L. ROUGET (ficc00118 exo 28)

► **SOLUTION.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit

$$A^p = A^{p-1}(AB - BA) = A^p B - A^{p-1} B A.$$

PROPOSITION 2.16.1 – Propriétés de la trace. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA),$$

On compose cette relation par la trace on obtient d'après ses propriétés

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(A^p) &= \operatorname{Tr}(A^p B) - \operatorname{Tr}((A^{p-1} B)A) \\ &= \operatorname{Tr}(A^p B) - \operatorname{Tr}(A(A^{p-1} B)) \\ \operatorname{Tr}(A^p) &= 0.\end{aligned}$$

<

Source : [1] p. 47

EXERCICE 2.16.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Montrer que la matrice A n'est pas inversible.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $AB^k - B^k A = kA^k$. En déduire que la matrice B est nilpotente.

2.17 Application du théorème de recollement

Source : [5]

EXERCICE 2.17.1 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in \mathcal{L}(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0 \right\}.$$

Déterminer la dimension de \mathcal{H} en fonction de $\dim E$, $\dim F$ et $\operatorname{Rg} f$.

Source : [5] Ch3, Th2

THÉORÈME 2.17.1 – Sommes directe & Applications linéaires. On suppose

que $E = \bigoplus_{i=1}^m E_i$. Pour tout indice $i \in$

$[1, m]$, on considère une application linéaire φ_i de E_i dans F . Alors, il existe une unique application linéaire φ de E

MÉTHODE 2.17.1 ♦

- **SOLUTION.** — On montre que \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$. Soit W un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F .
— Nous allons construire un isomorphisme entre \mathcal{H} et un ensemble dont on peut calculer la dimension ♦. On pose

$$\begin{aligned}\psi: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f) \times \mathcal{L}(W, E) \\ g &\longmapsto (g|_{\operatorname{Im} f}, g|_{\operatorname{Ker} f})\end{aligned}$$

Montrons que ψ est un isomorphisme.

- ▷ Montrons que ψ est bien définie :
soient $x \in E$ et $g \in \mathcal{H}$,

$$\psi(g)(x) = (g|_{\operatorname{Im} f}(x), g|_W(x)).$$

De plus, $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Ker} f$ donc $g|_{\operatorname{Im} f} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f)$.

$$(f \circ g \circ f)(x) = f\left(\underbrace{g\left(\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{def} \\ = y}}\right)}_{\in \operatorname{Ker} f}\right) = 0.$$

La linéarité est triviale.

- ▷ Montrons que ψ est surjective.

Soit $(g_1, g_2) \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f) \times \mathcal{L}(W, E)$.

Par théorème de recollement des applications linéaires, il existe une application $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\begin{cases} g|_{\operatorname{Im} f} = g_1 \\ g|_W = g_2 \end{cases}$.

$$\text{Soit } x \in E, (f \circ g \circ f)(x) = f \left(\underbrace{g(f(x))}_{\in \text{Im } f} \right) = f \left(\underbrace{g_1(f(x))}_{\in \text{Ker } f} \right) =$$

0 donc $g \in \mathcal{H}$ et ψ est surjective.

▷ Montrons que ψ est injective.

Soit $g \in \text{Ker } \psi$. Alors $(g|_{\text{Im } f}, g|_W) = (0_{\mathcal{L}(F,E)}, 0_{\mathcal{L}(F,E)})$.
Donc $g = 0_{\mathcal{L}(F,E)}$ et $\text{Ker } \psi = \{0_{\mathcal{L}(F,E)}\}$ soit ψ est injective.

Finalement, ψ est un isomorphisme.

Il y a donc égalité des dimensions entre les espaces de départ et d'arrivée de ψ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H} &= \dim (\mathcal{L}(\text{Im } f, \text{Ker } f)) + \dim (\mathcal{L}(W, E)) \\ &= \text{Rg } f \times \dim \text{Ker } f + \dim W \times \dim E \\ &= \text{Rg } f \times (\dim E - \text{Rg } f) + (\dim F - \text{Rg } f) \times \dim E \\ \dim \mathcal{H} &= \dim E \dim F - (\text{Rg } f)^2 \end{aligned}$$

REMARQUE 2.17.1 Si $\dim E = \dim F$ et que f est bijective, le résultat est cohérent. De même si $f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

◁

Une solution plus visuelle :

► **SOLUTION.** Soit W un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans $F : \text{Im } f \oplus W = F$ et soit V un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans $E : \text{Ker } f \oplus V = E$.
Soit $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base adaptée à la décomposition $\text{Im } f \oplus W = F$ et soit $\mathcal{B}' \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-r}, \varepsilon_{n-r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une base adaptée à la décomposition $\text{Ker } f \oplus V = E$.

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{H} &\iff g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f \\ &\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

à finir...

◁

2.18 Rang des puissances d'un endomorphisme nilpotent

EXERCICE 2.18.1 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n - 1$. Déterminer le rang u^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Source : [9]

► **SOLUTION.** On a, par hypothèse, $\dim(\text{Ker } u) = 1$ et la chaîne d'inclusions

$$\{0\} = \text{Ker}(u^0) \subset \text{Ker}(u) \subset \dots \subset \text{Ker}(u^{n-1}) \subset \text{Ker}(u^n) = E$$

puis, pour tout $k \geq n$, $\text{Ker}(u^n) = E$.

Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ alors

$$\begin{array}{l} \text{Ker}(u^{k+1}) \longrightarrow \text{Ker}(u^k) \\ u_k: \quad \quad \quad x \longmapsto u(x) \end{array}$$

définit une application linéaire dont le noyau est $\text{Ker}(u^{k+1}) \cap \text{Ker}(u)$, soit $\text{Ker}(u)$.

Le théorème de rang fournit $\dim(\text{Ker } u^k) \geq \text{Rg } u_k = \dim(\text{Ker } u^{k+1}) - 1$ d'où $\dim(\text{Ker } u^{k+1}) - \dim(\text{Ker } u^k) \in \{0, 1\}$.

On en déduit déjà que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker } u^k) \leq k$.

S'il existe k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ pour lequel $\dim(\text{Ker } u^{k+1}) = \dim(\text{Ker } u^k)$ alors $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, ... \triangleleft

2.19 Rang d'un endomorphisme nilpotent

EXERCICE 2.19.1 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Déterminer le rang de u .

Il s'agit de la réciproque de l'exercice précédent.

► **SOLUTION.** D'après l'exercice référence il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(u^k(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de E . La matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

une matrice de rang $n-1$. \triangleleft

2.20 [4] Planche no 3. Révision algèbre linéaire. Matrices

EXERCICE 2.20.1 Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

EXERCICE 2.20.2 Soient $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}_n[X]$ et u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, u(P) = P(X+1) - P$.

1. Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
2. Déterminer explicitement une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2.20.3 Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2.20.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de sa comatrice.

► **SOLUTION.** On a toujours $A \operatorname{com} A^\top = \det(A)I_n$. Par passage au déterminant et puisqu'une matrice a même déterminant que sa transposée, on obtient

$$\det(A) \det(\operatorname{com} A) = (\det A)^n.$$

- Si $\det A \neq 0$, on en déduit que $\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$.
- Si $\det A = 0$, alors $A \operatorname{com} A^\top = 0$ et donc $\operatorname{com} A^\top$ est soit nulle, soit diviseur de zéro, et donc dans tous les cas non inversible. Il en est de même de $\operatorname{com} A$ et donc $\det(\operatorname{com} A) = 0 = (\det A)^{n-1}$. Finalement,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}.$$

◁

EXERCICE 2.20.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang la comatrice de A en fonction du rang de A .

EXERCICE 2.20.6 Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

► **SOLUTION.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$. Alors, en composant cette relation par la trace on obtient, par linéarité,

$$\operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = n,$$

or $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ donc on aboutit à $n = 0$ ce qui est absurde. Finalement, il n'existe pas de tel couple. ◁

EXERCICE 2.20.7 Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$) telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe α tel que $f = \alpha \operatorname{Tr}$.

EXERCICE 2.20.8 Pour A matrice nilpotente donnée, on pose

$$\exp(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A + B$ est nilpotente et $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

2. Montrer que $\exp(A)$ est inversible.
3. Calculer $\exp(A)$ où A est un bloc de JORDAN.

EXERCICE 2.20.9 Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Justifier l'existence de A et B puis calculer BA .

EXERCICE 2.20.10 Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient des matrices inversibles.

EXERCICE 2.20.11 Soient A_1, \dots, A_p des matrices distinctes et inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $G \stackrel{\text{def}}{=} \{A_1, \dots, A_p\}$ soit stable par la multiplication.
Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 + \dots + A_p$. Montrer que $\text{Tr } A$ est un entier divisible par p .

2.21 Un endomorphisme nilpotent

EXERCICE 2.21.1 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, et f, g des endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f \quad \text{et} \quad g \text{ est diagonalisable.}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n.$$

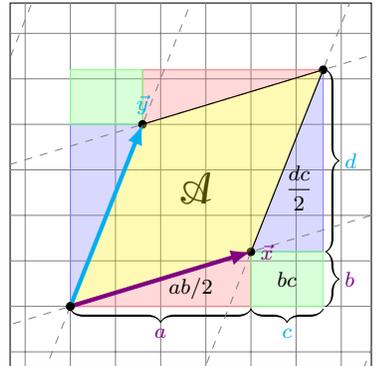
2. En déduire que f est nilpotent.

DÉTERMINANTS 3

L'utilisation des matrices et des déterminants trouve son origine dans l'étude systématique des systèmes linéaires menée à partir du XVII^e siècle. Alors que LEIBNIZ et MAC LAURIN avaient déjà introduit les notations à indices et résolu les systèmes à deux ou trois inconnues CRAMER, en 1754, comprend que les solutions d'un système linéaire s'expriment comme le quotient de deux expressions polynomiales multilinéaires des coefficients du système. Ces expressions représentent des déterminants mais ces derniers, étudiés notamment par VANDERMONDE et LAPLACE ne sont définis alors que par récurrence sur la taille (autrement dit par le développement par rapport à une rangée). On doit également à LAPLACE l'interprétation du déterminant en termes de volume. Par la suite, au début du XIX^e siècle GAUSS, dans ses recherches sur les formes quadratiques, représente les changements de base dans \mathbb{R}^3 à l'aide de tableaux de nombres (les matrices) et introduit le produit de deux de ces tableaux pour obtenir la composée de deux changements de bases. Cela devait suggérer en 1812 à CAUCHY la règle générale du produit de deux déterminants ; il lui revient d'imposer la terminologie moderne.

[10] p. 184.

Interprétation géométrique du déterminant en dimension 2



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \vec{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (a+c)(b+d) - 2 \left(\frac{ab}{2} + bc + \frac{dc}{2} \right) \\ &= ad - bc \\ \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3.1 Déterminant tridiagonal

DÉFINITION 3.1.1 – Matrice tridiagonale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M_n \stackrel{\text{def}}{=} (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *tridiagonale* si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = 0 \text{ si } |i - j| > 1.$$

Pour mettre en avant la structure de la matrice M_n , on l'écrit sous la forme

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 3.1.1 Les matrices de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont imbriquées les unes dans les autres de telle manière que pour $n > 1$,

$$M_n = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & b_{n-1} \\ \hline c_{n-1} & a_n \end{array} \right).$$

PROPOSITION 3.1.1 – Relation de récurrence. On note $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \det M_n$. La suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux

$$D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}.$$

■ **DÉMONSTRATION.**

$$\begin{aligned} D_n &= \left| \begin{array}{c|c} M_{n-1} & b_{n-1} \\ \hline c_{n-1} & a_n \end{array} \right| \\ &= a_n \det(M_{n-1}) + (-1)^{n-1} b_{n-1} \left| \begin{array}{c|c} M_{n-2} & b_{n-2} \\ \hline 0 \cdots 0 & c_{n-1} \end{array} \right| \\ &= a_n D_{n-1} + (-1)^{n-1} b_{n-1} (-1)^{n-2} c_{n-1} \det(M_{n-2}) \\ D_n &= a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2} \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.1.1 Si les trois diagonales sont constantes, respectivement égales à c, a et b alors

$$D_n = a D_{n-1} - bc D_{n-2}.$$

$$\text{Toep}_n(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont des matrices de TOEPLITZ tridiagonales. Nous les noterons $\text{Toep}_n(a, b, c)$ (notation non standard).

PROPOSITION 3.1.2 – Spectre d’une matrice de TOEPLITZ.

$$\text{Sp}(\text{Toep}_n(a, b, c)) = \left\{ a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Dans toute la suite on note $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \det(\text{Toep}_n(a, b, c))$. D’après le Déterminant tridiagonal, (corollaire 3.1.)

How to find the eigenvalues of tridiagonal TOEPLITZ matrix? (deuxième réponse) – math.stackexchange.com

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$$

avec $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = a$. On trouve

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left[\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Cette expression s’annule lorsque

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{a + \sqrt{a^2 - 4bc}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4bc}{a^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4bc}{a^2}}}$$

est une racine $(n+1)$ -ème de l’unité que l’on note ω_k .

Alors

$$\frac{4bc}{a^2} = 1 - \left(\frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1} \right)^2 = \frac{2\omega_k}{(\omega_k + 1)^2}$$

et

$$a = \pm \frac{\omega_k + 1}{2\sqrt{\omega_k}} 2\sqrt{bc}.$$

« The coefficient in ω_k is real and can be written »

$$\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Enfin, en remplaçant a par $a - \lambda$, on a montré que

$$\lambda = a \pm 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

□

MÉTHODE 3.1.1 Le calcul du déterminant d’une matrice tridiagonale consiste à déterminer la relation de récurrence vérifiée par le déterminant puis à trouver l’expression du terme général à l’aide des formules sur les suites récurrentes linéaires d’ordre deux.

Mettons en pratique.

EXERCICE 3.1.1 Pour tout x réel, déterminer le déterminant de taille n

$$A_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 2x & 1 & & & \\ 1 & 2x & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2x \\ & & & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'équation caractéristique (\mathcal{E}) associée est

$$r^2 - ar - b = 0.$$

— Si (\mathcal{E}) possède deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}^2$ alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

— Si (\mathcal{E}) possède une racine double $r_0 \in \mathbb{K}$ alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + n\mu)r_0^n.$$

— Si (u_n) est une suite à valeurs réelles (\mathcal{E}) possède deux racines conjuguées distinctes $r_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$ alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos(\theta n) + \mu \sin(\theta n)).$$

NANTS

► **SOLUTION.** Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la remarque précédente, on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$A_n(x) = 2xA_{n-1}(x) - A_{n-2}(x)$$

d'équation caractéristique

$$r^2 - 2xr + 1 = 0.$$

Son déterminant a pour expression $4(x^2 - 1)$.

À finir...

◁

3.2 Déterminant des $|a_i - a_j|$

EXERCICE 3.2.1 Soient $n \geq 2$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant de la matrice dont l'élément ligne i , colonne j est $|a_{i-1} - a_{j-1}|$.

Source : [1] p. 71

3.3 Déterminant de CAUCHY

DÉFINITION 3.3.1 – Déterminant de CAUCHY. Le déterminant de CAUCHY est un déterminant de taille n et de terme général $\frac{1}{a_i + b_j}$, où les complexes (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont tels que pour tout (i, j) , $a_i + b_j \neq 0$.

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

PROPOSITION 3.3.1 – Expression du déterminant de CAUCHY. Le déterminant de CAUCHY a pour expression

$$C_n = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i) \prod_{i < j} (b_j - b_i)}{\prod_{i, j} (a_i + b_j)}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** On raisonne par récurrence sur n .

Premièrement, faisons apparaître une ligne de 1 en multipliant toutes les colonnes par $a_n + b_j$.

Par n -linéarité du déterminant,

$$C_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n+b_1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, pour faire apparaître des 0 à la fin des $n-1$ premières colonnes, soustrayons la dernière colonne à toutes les autres.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2, \quad \frac{a_n + b_i}{a_i + b_j} - \frac{a_n + b_n}{a_i + b_n} = \frac{(a_n - a_i)(b_n - b_j)}{(a_i + b_j)(a_i + b_n)}$$

$$C_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i)} \begin{vmatrix} \frac{(a_n - a_1)(b_n - b_1)}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{(a_n - a_1)(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_{n-1})(a_1 + b_n)} & \frac{a_n + b_n}{a_1 + b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{(a_n - a_{n-1})(b_n - b_1)}{(a_{n-1} + b_1)(a_{n-1} + b_n)} & \cdots & \frac{(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1})}{(a_{n-1} + b_{n-1})(a_{n-1} + b_n)} & \frac{a_n + b_n}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Factorisons par les termes communs aux lignes et aux colonnes.

$$C_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^n (a_n + b_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_i + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Finalement, en développant par rapport à la dernière ligne on trouve la relation de récurrence :

$$C_n = \frac{1}{a_n + b_n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{(a_n + b_i)(a_i + b_n)} \right) C_{n-1}$$

Comme $C_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$, on obtient par récurrence

$$C_n = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i) \prod_{i < j} (b_j - b_i)}{\prod_{i, j} (a_i + b_j)}.$$

□

REMARQUE 3.3.1 On peut aussi écrire

$$C_n = \frac{V(a_1, \dots, a_n) V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{i, j} (a_i + b_j)}$$

en notant $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le déterminant de la matrice de VANDERMONDE de la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

MÉTHODE 3.3.1 La méthode pour calculer ce genre de déterminants « compliqués » est toujours la même :

1. Raisonner par récurrence sur la taille de la matrice.
2. Faire des opérations élémentaires sur les lignes/colonnes pour faire apparaître une ligne/colonne composée de 1.
3. Soustraire les lignes/colonnes de manière à obtenir une ligne/colonne presque composée uniquement de 0 sauf pour un seul coefficient.
4. Développer par rapport à cette dernière et obtenir une relation de récurrence sur le déterminant.

3.3.1 Matrice de HILBERT

Le déterminant d'une matrice de HILBERT est un cas particulier du déterminant de CAUCHY.

DÉFINITION 3.3.2 – Matrice de HILBERT. Une matrice de HILBERT est une matrice carrée de terme général

$$H_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{i+j-1}.$$

Source : [1] p. 82

Les matrices de HILBERT sont souvent utilisées pour tester des ordinateurs ou leurs programmes censés inverser des matrices. Le fait que leur déterminant soit rapidement très petit rend l'inversion de la matrice numériquement difficile et c'est ce qui fait la qualité du test.

3.4 Déterminant par blocs

EXERCICE 3.4.1 À quelles conditions sur A, B, C et D , des matrices carrées d'ordre n , a-t-on :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A \times D - B \times C) ?$$

Rappel de cours :

PROPOSITION 3.4.1 – . Soient T_1, \dots, T_p des matrices carrées et

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} T_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^p \det(T_i).$$

► **SOLUTION.** D'après le rappel de cours,

$$\det(AD - BC) = \begin{vmatrix} AD - BC & \star \\ 0 & I_n \end{vmatrix}.$$

On « remarque » que si les matrices D et C commutent et que si la matrice D est inversible alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & \star \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

...

◀

3.5 Dérivée du déterminant

EXERCICE 3.5.1

- Soient $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, n^2 fonctions dérivables sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} . Soit $d \stackrel{\text{def}}{=} \det(a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrer que d est dérivable sur \mathbb{R} et calculer d' .
- Application : calculer

$$d_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}.$$

Source : [4] Planche no 4. Révision algèbre linéaire. Déterminants

3.6 Déterminant de HÜRWITZ

EXERCICE 3.6.1 Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} r_1 & a & \cdots & a \\ b & r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & r_n \end{pmatrix}.$$

Source : [2]

► **SOLUTION.** On pose

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} r_1+x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & r_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & r_n+x \end{vmatrix}.$$

On cherche à calculer $f(0)$.

Par multilinéarité du déterminant, f est de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta.$$

Or on peut calculer f en deux points.

$$f(-a) = \prod_{i=1}^n (r_i - a)$$

$$f(-b) = \prod_{i=1}^n (r_i - b)$$

Si $a \neq b$, on en déduit que

$$f(0) = \beta = \frac{1}{a-b} \left[a \prod_{i=1}^n (r_i - b) - b \prod_{i=1}^n (r_i - a) \right].$$

$$\text{Si } a = b, \det = \lim_{b \rightarrow a} \frac{aQ(b) - bQ(a)}{a-b} \text{ règle de l'hôpital} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{aQ'(b) - Q(a)}{-1} = Q(a) - aQ'(a)$$

3.7 Matrice circulante modulo p

Ajouter un lien avec la section du déterminant circulaire.

Source : [2]

EXERCICE 3.7.1 Soit p premier et $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{Z}^p$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \\ a_{p-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_{p-2} & a_{p-1} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \equiv a_0 + \cdots + a_{p-1} \pmod{p}.$$

► **SOLUTION.**

$$\det(C(a_0, \dots, a_{n-1})) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \exp\left(i \frac{2kj\pi}{n}\right) \right).$$

◁

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

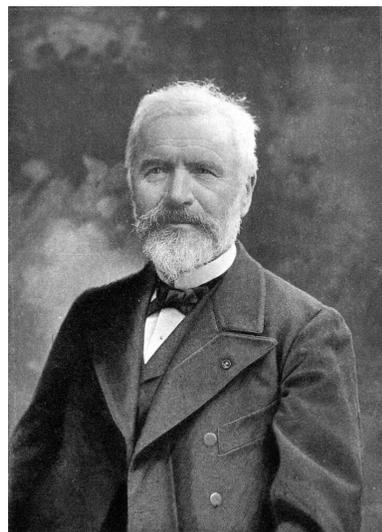
4

Diagonalisation

On doit à Camille JORDAN de nombreux résultats sur la réduction des endomorphismes qu'il découvre notamment à travers l'étude des groupes.

Le problème fondamental de la réduction est bien celui de caractériser les classes de similitude de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie ou, ce qui revient au même, les classes de similitudes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La recherche d'une matrice la plus simple possible pour représenter un endomorphisme donné vise de multiples buts : calculer les puissances successives de cet endomorphisme, son commutant, résoudre des systèmes différentiels linéaires... Une idée naturelle pour essayer de « réduire » l'étude d'un endomorphisme u donné à des choses plus simples consiste à essayer de décomposer l'espace vectoriel E en une somme directe de sous-espaces non triviaux stables par u . Cela n'est évidemment pas toujours possible. Les sous-espaces stables les plus simples sont ceux sur lesquels u coïncide avec une homothétie. On est ainsi naturellement amené à la notion de valeur propre. Si λ est un scalaire, on s'intéresse donc au sous-espace $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ appelé sous-espace propre pour la valeur propre λ lorsque celui-ci n'est pas nul. Le théorème de décomposition des noyaux nous assure que les différents sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe. Le cas où la somme remplit tout l'espace E mène à la notion d'endomorphisme diagonalisable : un tel endomorphisme peut être représenté par une matrice diagonale (il suffit de prendre une base formée de vecteurs propres). Pour les endomorphismes diagonalisables il est alors très facile de répondre à la question initiale de savoir quand ils sont semblables : il faut et suffit qu'ils aient les mêmes valeurs propres et que les espaces propres associés aient la même dimension. Il est aussi facile, en se ramenant à une matrice diagonale, de calculer les puissances d'un tel endomorphisme, son exponentielle (si on travaille sur un sous-corps de \mathbb{C}), son commutant...

Le texte suivant est extrait de [8] p. 169.



Camille JORDAN (1838 - 1922)

4.1 Matrice à diagonale dominante

DÉFINITION 4.1.1 – Matrice à diagonale dominante.

Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est

— à diagonale dominante si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| \geq \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|,$$

— à diagonale fortement dominante si de plus l'inégalité est stricte pour une valeur de i au moins,

— à diagonale strictement dominante si l'inégalité est stricte pour tout i .

LEMME 4.1.1 Toute matrice à diagonale strictement dominante (DSD) est inversible.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $X \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \cdots x_n)^\top \in \text{Ker}(A)$.

On pose $|x_{i_0}| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. La ligne i_0 de la relation $AX = 0$ donne

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = 0$$

soit

$$-a_{i_0,i_0} x_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j$$

d'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|.$$

Comme $|a_{i_0,i_0}| > \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$ par définition de A , on en déduit que

$|x_{i_0}| = 0$, autrement dit $X = 0$. Le noyau de A est donc réduit au vecteur i.e. la matrice A est inversible.

Pour une autre démonstration voir [11] page 51. □

4.1.1 Localisation des valeurs propres

À défaut de ne pas toujours pouvoir calculer exactement les valeurs propres d'une matrice, nous pouvons essayer de les localiser en restreignant autant que faire se peut le « domaine » dans lequel elles se trouvent.

THÉORÈME 4.1.1 – Localisation des valeurs propres. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{\mathcal{B}} \left(a_{i,i}, \sum_{k \neq i} |a_{i,k}| \right).$$

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. La matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ♦ donc n'est pas à DSD i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|.$$

Le spectre de la matrice A est donc inclus dans la réunion des disques de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{k \neq i} a_{i,k}$. □

♦ Par définition $\det(A - \lambda I_n) = \chi_A(\lambda) = 0$.

DÉFINITION 4.1.2 – Disques de GERSCHGORIN. Ces disques sont nommés les disques de GERSCHGORIN ♦ (cf. thème *Localisation des valeurs propres*, Ch. 11 [5])

COROLLAIRE 4.1.1 Soit $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \overline{\mathcal{B}} \left(a_{i,i}, \sum_{k \neq i} |a_{i,k}| \right) \quad E' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \overline{\mathcal{B}} \left(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{j,i}| \right).$$

Alors,

$$\text{Sp}(A) \subset E \cap E'.$$

■ **DÉMONSTRATION.** D'après le théorème ??,

$$\text{Sp}(A) \subset E \text{ et } \text{Sp}(A^\top) \subset E'.$$

Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^\top)$ donc $\text{Sp}(A) \subset E \cap E'$. □

Ce corollaire permet de restreindre davantage le domaine où se trouvent les valeurs propres d'une matrice.

PROPOSITION 4.1.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à DSD telle que $a_{i,i} > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $\det(A) > 0$.

■ **DÉMONSTRATION.** $\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$. Distinguer les vap complexes et réelles... □

4.2 Matrices stochastiques

Les matrices stochastiques interviennent en probabilités. Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $E \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket 1, k \rrbracket$, alors la matrice $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(Y = j \mid X = i)$$

est stochastique, ce qui par définition signifie qu'on a $a_{i,j} \geq 0$ et

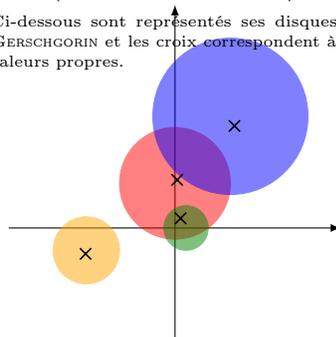
$$\sum_{j=1}^k a_{i,j} = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

L'évolution d'un système susceptible de prendre un nombre fini d'états notés $1, \dots, k$ est représentée mathématiquement par une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E . C'est ce qu'on appelle un

♦ Prenons un exemple en considérant la matrice à coefficients complexes

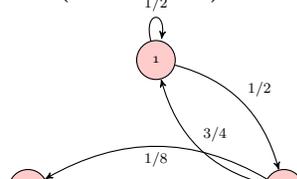
$$\begin{pmatrix} i4 & 0 & 2 & i3 \\ 1 & 5 + i10 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -8 - i2 \end{pmatrix}.$$

Ci-dessous sont représentés ses disques de GERSCHGORIN et les croix correspondent à ses valeurs propres.



Source : Texte de [8] p. 59

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



processus aléatoire (ou stochastique). Si X_{n+1} s'obtient à partir de la valeur de X_n et d'un tirage au sort effectué selon une loi ne dépendant que de cette valeur, on dit que le processus est une chaîne de MARKOV. Les exemples abondent : marches aléatoires, fortune d'un joueur, modélisation de l'alternance des voyelles et des consonnes dans un poème de POUCHKINE (par MARKOV lui-même), ou prévision (en probabilité) des états successifs d'un signal pour améliorer la compression en traitement du signal (SHANNON)

Techniquement, on dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n) est une chaîne de MARKOV si « la loi de l'état $n + 1$ conditionnelle au passé ne dépend que de l'état antérieur n », ce qui se traduit par

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i_n).$$

Si la matrice A est indépendante de n , on dit que la chaîne de MARKOV

est stationnaire. Si, dans ce dernier cas, on pose $Y_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = k) \end{pmatrix}$,

pour tout $n \geq 0$, on obtient $Y_{n+1} = AY_n$ et donc $Y_n = A^n Y_0$.

Le comportement (probabiliste) d'une chaîne de MARKOV stationnaire, et notamment son comportement asymptotique, est donc entièrement décrit par la donnée de la loi initiale Y_0 et des puissances de la matrice A .

DÉFINITION 4.2.1 – Matrice stochastique. Une matrice stochastique (matrice de transition d'une Chaîne de MARKOV) est une matrice $P \in \mathcal{M}_n([0, 1])$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$. Autrement dit, chaque ligne de P est un vecteur de probabilité. On dit que P est *doublement stochastique* si P et P^\top sont stochastiques.

L'exercice suivant étudie le spectre d'une matrice stochastique.

EXERCICE 4.2.1 Soit P une matrice stochastique.

1. Montrer que 1 est valeur propre de P .
2. Soit $v = (v_1 \cdots v_n)^\top$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1. En considérant $|v_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$, montrer que le sous-espace propre associé à E_1 est de dimension 1.
3. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de P , alors $|\lambda| \leq 1$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de P telle que $|\lambda| = 1$ et un vecteur propre associé.
 - a) Montrer qu'il existe un vecteur propre associé à λ tel que $x = 1$.
 - b) Montrer qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\left| \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} x_j \right| = 1$.
 - c) Soit θ l'argument principal de $\sum_{j=1}^n p_{i_0,j} x_j$. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} x_j) = 1$.
 - d) En déduire que $\lambda = 1$.

► **SOLUTION.** 1. 1 est valeur propre évidente de P de vecteur propre associé $v = (1, \dots, 1)^\top$.

2. Montrer que $\dim E_1 = 1$.

— Appliquer la même méthode que la démonstration du lemme d'HADAMARD.

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in E_1$. Montrons que $X \in \text{Vect}(v)$.

On montre que $|x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} |x_j|$ et on

écrit $|x_{i_0}| = |x_{i_0}| \sum_{j=1}^n p_{i_0,j}$. D'où, en faisant la différence,

pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_{i_0}| = |x_j|$. De plus d'après la première relation, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire et donc les v_j sont *positivement liées*. Finalement, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_j = v_{i_0}$ soit $\dim E_1 = 1$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de P .

Poser $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ un vecteur propre associé et appliquer encore une fois la même méthode; poser $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, écrire en module la ligne i_0 de l'égalité $\lambda X = PX$, diviser par $|x_{i_0}|$ (qui est non nul d'après la question précédente) puis majorer par 1.

Pour les curieux, lire [11] page 59.

PROPOSITION 4.2.1 — Le Rayon spectral d'une matrice stochastique est égal à 1.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ et \tilde{x} un vecteur propre associé.

a) $\tilde{x} \neq 0$ car $\tilde{x} \neq 0$. $x = \frac{\tilde{x}}{x}$ qui est vecteur propre associé à λ et $x = 1$.

b) Il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = x = 1$.

$$\text{Et } |\lambda x_{i_0}| = |\lambda| |x_{i_0}| = 1 = \left| \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} x_j \right|.$$

c) On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} x_j &= e^{i\theta} && \text{selon 4)b)} \\ &= e^{i\theta} \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} (x_j - e^{i\theta}) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} (x_j e^{-i\theta} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\sum_{j=1}^n p_{i_0,j} (x_j e^{-i\theta} - 1) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n p_{i_0,j} \left(\underbrace{\text{Re}(x_j e^{-i\theta})}_{|\cdot| \leq |x_j e^{-i\theta}| \leq |x_j| \leq |x_{i_0}| \leq 1} - 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

donc $|\operatorname{Re}(x_j e^{-i\theta})| \leq 1$.

Somme de termes négatifs qui est nulle donc

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \operatorname{Re}(x_j e^{-i\theta}) = 1.$$

d) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$|x_j e^{-i\theta}| = |x_j| = \sqrt{\operatorname{Re}(x_j e^{-i\theta})^2 + \operatorname{Im}(x_j e^{-i\theta})^2} = \sqrt{1 + \operatorname{Im}(x_j e^{i\theta})^2}$$

$$\text{donc } \operatorname{Im}(x_j e^{i\theta}) = 0 \text{ donc } x_j e^{i\theta} = 1 \text{ et } x = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. Px =$$

$$e^{i\theta} P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x.$$

◁

4.3 Endomorphismes semi-simples

PROPOSITION 4.3.1 – Critère de diagonalisabilité dans un \mathbb{R} -ev. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f .

Source : à compléter

■ DÉMONSTRATION.

(\Leftarrow) Supposons f diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de E . Soit (e_1, \dots, e_m) une base de F . Puisqu'on a supposé f diagonalisable, il existe une base (v_1, \dots, v_n) de E formée de vecteurs propres pour f . D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la base (e_1, \dots, e_m) de F en une base $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ de E , où on rajouté uniquement des vecteurs de notre base de vecteurs propres (c'est-à-dire e_{m+1}, \dots, e_n ont été pris parmi les v_i). En effet, la famille (e_1, \dots, e_m) est libre, et elle est contenue dans la famille génératrice $(e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_n)$, donc il existe une famille \mathcal{F} de vecteurs de E , telle que

$$(e_1, \dots, e_m) \subseteq \mathcal{F} \subseteq (e_1, \dots, e_m, v_1, \dots, v_n)$$

et \mathcal{F} à la fois libre et génératrice.

il manque une explication supplémentaire

On prend alors $G \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_n)$. C'est un supplémentaire de F dans E , et il est stable par f car e_{m+1}, \dots, e_n sont des vecteurs propres de f .

(\Rightarrow) Réciproquement, supposons que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f . Considérons

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$$

le sous-espace vectoriel de E formé de la somme directe des sous-espaces propres de f . Si f n'était pas diagonalisable, F serait strictement inclus dans E . Soit H un hyperplan de E contenant

F . Alors par hypothèse H admet un supplémentaire stable par f . Ce supplémentaire est une droite, engendrée par un vecteur propre de f . Mais c'est une contradiction car tous les vecteurs propres de f sont dans H . Ainsi, f est diagonalisable.

□

Nous allons maintenant définir la notion d'endomorphisme semi-simple en relâchant un peu la condition de l'exercice ci-dessus : nous allons seulement demander aux sous-espaces stables de posséder un supplémentaire stable.

DÉFINITION 4.3.1 – Endomorphisme semi-simple. Un endomorphisme u est dit *semi-simple* si tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u .

PROPOSITION 4.3.2 – Critère de diagonalisabilité sur un \mathbb{C} -ev. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'endomorphisme u est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

■ **DÉMONSTRATION.** (\Leftarrow) On suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable.

Son polynôme caractéristique est scindé ce que l'on voit en mettant u sous forme diagonale, et par invariance de χ par changement de base.

Soit F un sous-espace de E . Soit (e_1, \dots, e_n) une base de vecteurs propres de u et (f_1, \dots, f_p) une base de F . Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (f_1, \dots, f_p) en une base de E en rajoutant $n - p$ vecteurs parmi la base (e_1, \dots, e_n) , quitte à réindexer, on peut supposer que c'est (e_{p+1}, \dots, e_n) , ces vecteurs engendrent alors un sous-espace stable supplémentaire de F .

(\Rightarrow) On construit une base de vecteurs propres de la manière suivante : prenons un hyperplan H quelconque, il existe une droite stable supplémentaire, donc dirigée par un vecteur propre e_1 . Si on a construit une famille libre de vecteurs propres (e_1, \dots, e_k) , on prend un hyperplan contenant $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, et on trouve une droite stable $\text{Vect}(e_{k+1})$ supplémentaire à H . On conclut par récurrence.

□

Notes de la correction vue en cours.

■ **DÉMONSTRATION.** (\Leftarrow) Soit F un sev de E stable par f . Posons

$g \stackrel{\text{def}}{=} f|_F$ qui est diagonalisable car f l'est par hypothèse.

Soit \mathcal{B}_F une base de F formée de vep de g .

Soit \mathcal{B}' une base de E formée de vep de f (qui existe car f est diagonalisable).

On complète \mathcal{B}_F est une base \mathcal{B} de E en prenant des vep $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ de \mathcal{B}' . On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres associées.

On pose $G = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$. De cette manière, F et G sont supplémentaires. Montrons que G est stable par f .

Soit $x = \sum_{i=1}^r \mu_i \varepsilon_i \in G$. Donc $f(x) = \sum_{i=1}^r \mu_i f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_i \varepsilon_i \in G$ et G est stable par f .

(\Rightarrow) Montrons que f est diagonalisable. On va montrer que $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

1. Somme directe :

On pose $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ et $\text{Sp}(f) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^r x_i \in F$ où $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$. Alors $f(x) = \sum_{i=1}^r \underbrace{\lambda_i x_i}_{\in E_{\lambda_i}(f)} \in F$. Donc F est stable par f .

2. Montrons que $F = E$.

Par hypothèse, F admet un supplémentaire G dans \mathbb{C}^n , stable par f . Montrons que $G = \{0\}$ en raisonnant par l'absurde.

On pose $g = f|_G$. D'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS sur \mathbb{C} , g admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ de vep associé x_μ . On montre que $x_\mu \in F \cap G$. Or F et G sont supplémentaires donc $x_\mu = 0_E$: contradiction. D'où le résultat.

— Considérer R_θ . à revoir

□

EXERCICE 4.3.1 Décrire un contre-exemple à la réciproque dans \mathbb{R} , en dimension 2.

4.4 Autour du commutant

DÉFINITION 4.4.1 – Commutant d'une matrice. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$.

EXERCICE 4.4.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $C(u)$ a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel puis que, si u est diagonalisable :

$$\dim C(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim^2 E_\lambda(u).$$

► **SOLUTION.**

◀

EXERCICE 4.4.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication.
b) Montrer que si $M \in C(A)$ et M est inversible, alors $M^{-1} \in C(A)$.
2. Soit D une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.
a) Déterminer $C(D)$.

Source : [1] p. 119

Source : [5] (Exercice 12 TD 11)

b) Montrer que (I_n, D, \dots, D^{n-1}) est une base de $C(D)$.

3. On se limite au cas $n = 2$.

a) Déterminer les matrices A telles que $\dim C(A) = 4$.

b) Montrer que $\dim C(A) \geq 2$.

c) On suppose que $\dim C(A) \geq 3$. En utilisant $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect} \{E_{1,1}, E_{1,2}\}$ ou $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect} \{E_{2,1}, E_{2,2}\}$, montrer que $A = \lambda I_2$.

d) Pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer une base de $C(A)$.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Au lieu de redémontrer les propriétés d'un sev, on peut voir $C(A)$ comme le **noyau de l'application linéaire** $M \mapsto MA - AM$ ce qui donne directement le résultat.

2. On veut montrer que $M^{-1}A = AM^{-1}$ i.e. $A = MAM^{-1}$ ce qui est vrai car $MA = AM$.

3. — $C(D) = \mathcal{D}_n$ (l'ensemble des matrices diagonales de taille n)
(ne pas oublier de montrer la double inclusion).

— Comme $|\mathcal{B}| = \dim C(D)$, il suffit de montrer la liberté de \mathcal{B} .

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0_n$.

Revoir le caractère générateur avec les polynômes d'interpolation.

— Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k d_i^k = 0_n$ (*). Donc le

polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ qui est de degré $n - 1$ et possède n racines distinctes et est donc le polynôme nul. On en déduit que les λ_i sont tous nuls. La famille \mathcal{B} est bien libre et forme une base de $C(D)$.

— Les relations (*) forment un système de VANDERMONDE de n équations à n inconnues. Comme les coefficients d_i sont deux à deux distincts, le système est inversible et son unique solution est le vecteur colonne nul.

4. On se limite au cas $n = 2$.

a) Déterminer les matrices A telles que $\dim C(A) = 4$.

$C(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $C(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il y a égalité des dimensions.

Évaluer les commutant en les matrices de la base canoniques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on trouve que A est scalaire.

Ne pas oublier de montrer la réciproque.

b) Montrer que $\dim C(A) \geq 2$.

Si A est scalaire, cf. question précédente.

Sinon montrer que la famille $\{I_2, A\} \subset C(A)$ est libre.

c) Énoncé...

4.5 Matrice circulante

DÉFINITION 4.5.1 – Matrice circulante. Une *matrice circulante* est une matrice carrée dans laquelle on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire des coefficients. Soit $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$,

une matrice circulante est de la forme :

$$C(c_0, \dots, c_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

4.5.1 Réduction d'une matrice circulante

PROPOSITION 4.5.1 – Spectre d'une matrice circulante.

$$\text{Sp}(C(c_0, \dots, c_{n-1})) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \exp\left(i \frac{2kj\pi}{n}\right) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Pour alléger les notations, on pose

$$C \stackrel{\text{def}}{=} C(c_0, \dots, c_{n-1}).$$

Nous cherchons à déterminer le spectre de la matrice C , ce qui ne semble pas évident au premier abord (on se rend rapidement compte que le calcul direct du polynôme caractéristique n'est pas une bonne approche).

Notre démarche va consister à exprimer la matrice C comme un polynôme évalué en une matrice dont on sait calculer le spectre. On en déduira ensuite le spectre de la matrice C .

On pose

$$J_n \stackrel{\text{def}}{=} C(0, 1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On remarque que la matrice C s'écrit comme un polynôme en la matrice J_n ♦. Plus précisément,

$$C = \sum_{k=0}^{n-1} c_k J_n^k \stackrel{\text{def}}{=} P_C(J_n).$$

Calculons le polynôme caractéristique de la matrice J_n . Par définition, $\chi_{J_n} \stackrel{\text{def}}{=} \det(XI_n - J_n)$ soit

$$\chi_{J_n}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & X & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on trouve

$$\chi_{J_n}(X) = X \times X^{n-1} + (-1) \times (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1}$$

♦ Exemple avec les puissances successives de J_3 :

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit

$$\chi_{J_n}(X) = X^n - 1.$$

Le polynôme caractéristique de J_n est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc J_n est diagonalisable et en posant $\omega \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{2\pi}{n}}$,

$$\text{Sp}(J_n) = \mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Ainsi,

$$J_n \sim \text{Diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$$

et donc, comme $C = P_C(J_n)$, par linéarité \blacklozenge ,

$$C \sim \text{Diag}(P_C(1), P_C(\omega), P_C(\omega^2), \dots, P_C(\omega^{n-1})).$$

Ainsi, $\text{Sp}(C) = \left\{ P_C(\omega^k) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. □

\blacklozenge Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^k = PD^kP^{-1}$.

Soit $Q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n q_k X^k$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(A) &= \sum_{k=0}^n q_k (PD^kP^{-1}) \\ &= P \left(\sum_{k=0}^n q_k D^k \right) P^{-1} \end{aligned}$$

$$Q(A) = PQ(D)P^{-1}.$$

PROPOSITION 4.5.2 – Déterminant d’une matrice circulaire.

$$\det(C(c_0, \dots, c_{n-1})) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \exp\left(i\frac{2kj\pi}{n}\right) \right).$$

■ DÉMONSTRATION. Le déterminant d’une matrice est égal au produit de ses valeurs propres. □

4.5.2 Calcul des matrices de changement de base

Nous cherchons à déterminer une base de vecteurs propres de la matrice C . Par le même raisonnement que pour le calcul de son spectre, nous allons d’abord déterminer une base de vecteurs propres de la matrice J_n .

Nous avons montré que $\text{Sp}(J_n) = \mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre ω^k est

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \blacklozenge.$$

\blacklozenge En effet, $J_n X_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\omega^k \times \omega^{(n-1)k} = (\omega^n)^k = 1^k = 1$.
 Matrice circulante – [wikipedia.org](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_circulante)

Nous avons donc exhibé une famille de n vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, soit une base propre pour J_n .

Par conséquent, c’est aussi une base propre pour tout polynôme en J_n , c’est-à-dire pour toute matrice circulante.

Nous avons donc déterminé la première matrice de passage à savoir

$$P \stackrel{\text{def}}{=} [X_1 \cdots X_n].$$

Le prochain exercice propose de calculer P^{-1} .

Source : [4] Planche no 3. Révision algèbre linéaire. Matrices

EXERCICE 4.5.1 Soient $n \geq 2$ et $\omega \stackrel{\text{def}}{=} e^{2i\pi/n}$.
 Soit $P \stackrel{\text{def}}{=} (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n}$. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} .

► **SOLUTION.** Calculons $P\bar{P}$. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne k , colonne ℓ , de $P \times \bar{P}$ vaut

$$\sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(\ell-1)} = \sum_{j=1}^n (\omega^{k-\ell})^{j-1}.$$

- Si $k = \ell$, ce coefficient vaut n .
- Si $k \neq \ell$, puisque $-n < k - \ell < n$ et que $k - \ell \neq 0$, $\omega^{k-\ell} \neq 1$. Le coefficient ligne k , colonne ℓ , de $P\bar{P}$ est donc égal à

$$\frac{1 - (\omega^{k-\ell})^n}{1 - \omega^{k-\ell}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0.$$

Finalement, $P\bar{P} = nI_n$. Ainsi, la matrice P est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{n}\bar{P}$. ◀

Finalement,

$$C = \frac{1}{n}PJ_n\bar{P}.$$

4.6 Que dire si M^2 est diagonalisable ?

PROPOSITION 4.6.1 – Critère de diagonalisabilité. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice M^2 est diagonalisable. Alors M est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker } M = \text{Ker } M^2$.

■ **DÉMONSTRATION.** (\Rightarrow) Supposons que la matrice M est diagonalisable. Montrons que $\text{Ker } M^2 \subset \text{Ker } M$ (l'autre inclusion est toujours vraie) ♦.

Voyons deux approches.

- Nous allons montrer l'égalité des dimensions de ces deux espaces.

Soient u l'endomorphisme canoniquement associé à M et \mathcal{B} une base de diagonalisation de u . Le rang d'une matrice diagonale étant le nombre de coefficients diagonaux non nuls, $\text{Rg } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = \text{Rg } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc $\text{Rg } u^2 = \text{Rg } u$ ♦. Par le théorème du rang, il s'ensuit que $\dim \text{Ker } u^2 = \dim \text{Ker } u$.

- Soit $X \in \text{Ker } M^2$ i.e. $M^2X = 0$ (*). Montrons que $MX = 0$. L'idée est de faire apparaître un produit scalaire sur l'ensemble des vecteurs colonnes d'une matrice i.e. un produit de la forme $N^T N$.

Comme M^2 est diagonalisable, il existe P inversible et D diagonale telles que $M^2 = PDP^{-1}$. En remplaçant M^2 par cette expression dans (*) puis en multipliant à

♦ Soit $X \in \text{Ker } M$. Alors,

$$MX = 0$$

d'où

$$M(MX) = M \times 0 = 0$$

et

$$X \in \text{Ker } M^2.$$

♦ Le rang est un invariant de similitude.

gauche successivement par P^{-1} , $(P^{-1})^\top$ et X^\top on trouve $X^\top(P^{-1})^\top D^2 P^{-1} X = 0$ soit

$$(DP^{-1}X)^\top(DP^{-1}X) = 0.$$

Comme $(C, C') \mapsto C^\top \times C'$ définit un produit scalaire sur l'espace des vecteurs colonnes, on a $DP^{-1}X = 0$ car il est orthogonal à lui-même et donc, en multipliant à gauche par P , nous obtenons bien $MX = 0$.

(\Leftrightarrow) Supposons que $\text{Ker } M = \text{Ker } M^2$. Voyons encore deux approches.

— [9] p. 100 \blacklozenge

Comme M^2 est diagonalisable, il existe Q scindé à racines simples vérifiant $Q(0) \neq 0$ tel que $XQ(X)$ annule M^2 , c'est-à-dire $M^2Q(M^2) = 0$.

Alors, pour tout $X \in E$, $Q(M^2)X \in \text{Ker } M^2$; or $\text{Ker } M^2 = \text{Ker } M$ par hypothèse donc $Q(M^2)X \in \text{Ker } M$ soit $MQ(M^2)X = 0$.

Ainsi, $XQ(X^2)$ est un polynôme annulateur de M . Il suffit de remarquer que ce polynôme est scindé à racines simples (car les racines complexes de Q sont deux à deux distinctes et non nulles) pour conclure avec le critère algébrique de diagonalisabilité que M est diagonalisable.

— Une démonstration alternative consiste à montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ de racines carrées distinctes μ et μ' , le sous-espace propre u^2 associé à λ se décompose avec les sous-espaces propres u :

$$\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u^2) = \text{Ker}(\mu \text{Id}_E - u) \oplus \text{Ker}(\mu' \text{Id}_E - u).$$

La condition porte alors que le sous-espace propre de u^2 associé à 0, c'est-à-dire $\text{Ker}(u^2)$. Notes de cours à traiter
Raisonnons par analyse-synthèse : soit λ une valeur propre non nulle de f^2 . Notons μ une racine carrée complexe de λ . Montrons que $E_\lambda(f^2) = E_\mu(f) \oplus E_{-\mu}(f)$.

On pose $y = \frac{x}{2} + \frac{f(x)}{2\mu}$ et $z = \frac{x}{2} - \frac{f(x)}{2\mu}$.

Comme f^2 est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de f^2 . On décompose chacun de ces sep comme ci-dessus et on en déduit que E est la somme directe des sep de f i.e. f est diagonalisable.

□

4.7 Raciné carrée d'une matrice

Source : [Exo Maths X MP #7 - Racine d'une matrice - share.miple.co](#)

PROPOSITION 4.7.1 — . Pour tout $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

[retrouver la source](#)

■ **DÉMONSTRATION. Existence.** Comme la matrice A est symétrique et positive, d'après le théorème spectral, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des réels positifs et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = P^{-1} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) P$.

On pose $B \stackrel{\text{def}}{=} P^{-1} \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}) P$.

\blacklozenge La clé de cette démonstration est l'équivalence

M diagonalisable $\iff \exists P \in \text{Ann}(M)$ s.a.r.s.

La matrice B vérifie $B^2 = A$, elle est bien symétrique car la matrice P est orthogonale et B est positive puisque symétrique à valeurs propres positives.

Unicité. Supposons donnée une matrice C comme second candidat. Considérons Q un polynôme vérifiant, pour $1 \leq i \leq r$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q(A) &= P^{-1}Q(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r))P \\ &= P^{-1} \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})P = B. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $C^2 = A$ alors C et A commutent. Par conséquent, C commute avec tout polynôme en A et commute donc avec B .

Les matrices B et C étant diagonalisables (car symétriques) et commutant, elles sont codiagonalisables.

Ainsi, il existe $R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, D_1, D_2 diagonales réelles telles que $R^{-1}BR = D_1$ et $R^{-1}CR = D_2$.

Or $D_1^2 = R^{-1}B^2R = R^{-1}AR = R^{-1}C^2R = D_2^2$. Les matrices D_1 et D_2 étant diagonales à coefficients positifs, on en déduit que $D_1 = D_2$. Ainsi, $B = C$. \square

EXERCICE 4.7.1 Exercice 11, TD 11 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'a pas de racine dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4.8 Réduction d'une matrice creuse

EXERCICE 4.8.1 Soit $n \geq 2$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} & & c \\ & (0) & \vdots \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Étudier la possibilité de diagonaliser A sur \mathbb{R} .

Remarques :

- Si $b = c$ alors A est symétrique réelle donc diagonalisable.
- A est au plus de rang 2. Donc par le **théorème du rang**, 0 est une valeur propre de A de multiplicité au moins $n - 2$.

4.9 Vecteurs propres de $\text{com}(A)^\top$

EXERCICE 4.9.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(\text{com}(A)^\top).$$

$$A \times \text{com}(A)^\top = \text{com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$$

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et X un vecteur propre associé. Alors $\lambda(BX) = \det(A)X$.

- $\lambda \neq 0 : BX = \frac{\det(A)}{\lambda} X$.
- $\lambda = 0 : \text{alors } \det(A) = 0 \text{ et } \text{Rg}(A) \leq n - 1$.
 - $\text{Rg}(A) \leq n - 2 : \text{supposer par l'absurde qu'il existe un déterminant mineur de } A \text{ non nul}$.
 - $\text{Rg}(A) = n - 1 : X \in \text{Ker}(A) \text{ qui est une droite vectorielle}$.

A et B commutent donc $\text{Ker}(A)$ est stable par B

◁

4.10 Éléments propres de MN , de NM

PROPOSITION 4.10.1 — Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $0 \in \text{Sp}(MN) \iff 0 \in \text{Sp}(NM)$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\dim E_\lambda(MN) = \dim E_\lambda(NM)$$

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. ...
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, montrer que $\dim(E_\lambda(MN)) = \dim(E_\lambda(NM))$.
On remarque que si $X \in E_\lambda(MN)$ alors $NX \in E_\lambda(NM)$. On pose alors :

$$\begin{aligned} \varphi: E_\lambda(MN) &\longrightarrow E_\lambda(NM) \\ X &\longmapsto NX \end{aligned}$$

On montre que φ est injective et on en déduit que $\dim(E_\lambda(MN)) \leq \dim(E_\lambda(NM))$. Par symétrie des rôles de M et de N , on montre l'inégalité dans le sens inverse et on en déduit l'égalité.

3. ...
4. ...

4.11 Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

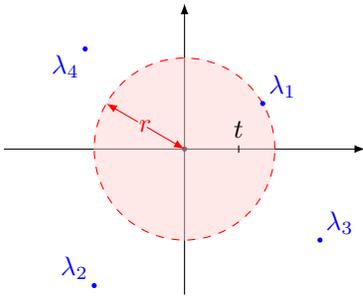
DÉFINITION 4.11.1 – Partie dense. Soit E un espace vectoriel normé et D une partie de E . On dit que D est *dense* dans E si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- pour tout $x \in E$, il existe une suite (y_n) d'éléments de D qui converge vers x ,
- pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in D$ tel que $y - x \leq \varepsilon$,
- l'adhérence \overline{D} de D est égale à E .

Source : Partie dense – Bibm@ath.net

4.11.1 Le cas des matrices inversibles

THÉORÈME 4.11.1 – Densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.



■ **DÉMONSTRATION.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Son polynôme caractéristique χ_A est de degré n et admet donc au plus n racines.

Notons $r \stackrel{\text{def}}{=} \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$.

Ainsi,

$$\forall t \in]0, r[, \chi_A(t) \neq 0$$

soit

$$\forall t \in]0, r[, A - tI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Soit $p_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{p \mid \frac{1}{p} < r\right\}$. Ainsi, en posant

$$A_p \stackrel{\text{def}}{=} A - \frac{1}{p + p_0} I_n,$$

la suite $(A_p)_{p \geq 0}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers la matrice A .

Finalement, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nous avons construit une suite de matrices inversibles qui converge vers la matrice A , ce qui assure la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. \square

EXERCICE 4.11.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On pourra commencer par le cas où la matrice A est inversible.

La démonstration suivante est « chimique » : la continuité du déterminant va servir de catalyseur à la partie dense qu'est $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Une application continue est entièrement déterminée par l'image d'une partie dense

► **SOLUTION.** \triangleright On suppose que la matrice A est inversible. Revenons à l'expression du polynôme caractéristique par le déterminant :

$$\begin{aligned} \chi_{AB} &= \det(\lambda I_n - AB) \\ &= \det(A(\lambda A^{-1} - B)) && \text{car } A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ &= \det(A) \det(\lambda A^{-1} - B) && \text{par multiplicité du déterminant} \\ &= \det(\lambda A^{-1} - B) \det(A) \\ &= \det(\lambda I_n - BA) \end{aligned}$$

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

\triangleright Revenons au cas général. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après la densité des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers la matrice A . D'après le premier point, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\chi_{A_p B} = \chi_{B A_p}$$

soit

$$\det(\lambda I_n - A_p B) = \det(\lambda I_n - B A_p).$$

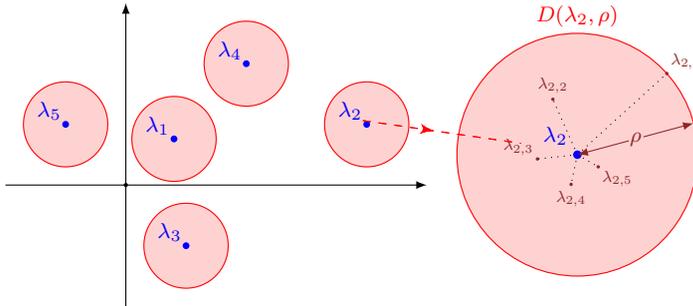
Comme le produit matriciel est une application bilinéaire, la matrice $A_p B$ (resp. $B A_p$) tend vers AB (resp. BA) quand p tend vers l'infini.

De plus, comme le déterminant est une application multilinéaire

Soit $\varepsilon > 0$, nous allons commencer par « séparer » les valeurs propres distinctes. On peut trouver un rayon ρ tel que $0 < \rho < \varepsilon$, pour lequel les disques $D(\lambda_1, \rho), \dots, D(\lambda_s, \rho)$ sont distincts deux à deux. Enfin, dans chacun de ces disques – qui sont des parties infinies de \mathbb{C} – on peut, pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, choisir r_i complexes notés $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,r_i}$ distincts deux à deux.

On peut même expliciter

$$\lambda_{i,1} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i + \frac{\rho}{1}, \dots, \lambda_{i,r_i} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i + \frac{\rho}{r_i}.$$



Représentation des disques $D(\lambda_i, \rho)$ et des complexes choisis à l'intérieur. Les $\lambda_{2,i}$ sont décalés pour une meilleure lisibilité.

On considère alors la matrice

$$M_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} P \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & & & t_{1,j} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{s,r_s} \end{pmatrix} P^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} PT_\varepsilon P^{-1}.$$

Par construction, cette matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

On choisit maintenant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la *norme du sup* sur les coefficients, définie par :

$$\forall M \stackrel{\text{def}}{=} (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad M = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|.$$

On démontre facilement que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB \leq nAB$ ♦. Ainsi

♦ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} |[AB]_{i,j}| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n AB \\ &\leq nAB. \end{aligned}$$

Cette norme est presque sous-multiplicative.

$$M - M_\varepsilon = P(T - T_\varepsilon)P^{-1} \leq \underbrace{nPP^{-1}}_{\stackrel{\text{def}}{=} K} T - T_\varepsilon \leq K\varepsilon.$$

En effet,

$$T - T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s - \lambda_{s,r_s} \end{pmatrix}$$

donc

$$M - M_\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \lambda_{i,r_i}|.$$

Or les λ_{i,r_i} ont été choisis dans les disques $D(\lambda_i, \rho)$ et donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|\lambda_i - \lambda_{i,r_i}| \leq \rho < \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration, puisque si ε tend vers 0, la matrice M_ε tend vers la matrice M pour la norme \cdot donc pour toute norme puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. \square

EXERCICE 4.11.2 Peut-on dire que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

PROPOSITION 4.11.3 - . L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

4.11.3 Divers

EXERCICE 4.11.3 Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

EXERCICE 4.11.4 Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.

EXERCICE 4.11.5 Soit $p \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 4.11.6 Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.12 Réduction simultanée

DÉFINITION 4.12.1 – Endomorphismes codiagonalisables/-cotrigonalisables. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables (resp. trigonalisables). On dit que u et v sont *codiagonalisables* (resp. *cotrigonalisables*) s'ils sont diagonalisables (resp. trigonalisables) dans une même base de E .

PROPOSITION 4.12.1 – CNS de réduction simultanée. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables). Alors,
 u, v codiagonalisables (resp. cotrigonalisables) $\iff u, v$ commutent.

■ **DÉMONSTRATION.** Montrons le résultat pour la codiagonalisation. Raisonnons par double implication.

Source : [5] (Thème *Diagonalisation simultanée* Ch. 11)

(\implies) Supposons que les endomorphismes u et v sont codiagonalisables. On note D (resp. \tilde{D}) la matrice diagonale de u dans une base de E (resp. celle de v dans cette même base). Comme ces matrices sont diagonales, $D \times \tilde{D} = \tilde{D} \times D$ ♦ et on en déduit que u et v commutent.

♦ Le produit de matrices diagonales commute.

(\impliedby) Supposons que les endomorphismes u et v commutent. Notons $\text{Sp}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda_i \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket \}$. Comme u est diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u).$$

$$\begin{aligned}
 \diamond v \circ (u - \lambda_i \text{Id}_E) &= v \circ u - \lambda_i v \\
 u \text{ et } v \text{ commutent} &= u \circ v - \lambda_i v \\
 &= (u - \lambda_i \text{Id}_E) \circ v.
 \end{aligned}$$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme v commute avec $u - \lambda_i \text{Id}_E$ \diamond , $E_{\lambda_i}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ est stable par v \diamond .

En notant v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$, comme v est diagonalisable, v_i est aussi diagonalisable. Ainsi, il existe $(e_{i,1}, \dots, e_{i,r_i})$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i . De plus, $e_{i,j} \in E_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$. Ainsi, $u(e_{i,j}) = \lambda_i e_{i,j}$ et $e_{i,j}$ est un vecteur propre de u .

Finalement, $(e_{i,1}, \dots, e_{i,r_i})_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u et de v . Ainsi, u et v sont diagonalisables dans cette même base. □

Source : [10] p. 167

REMARQUE 4.12.1

- La proposition établit que la commutativité est une condition suffisante pour réduire simultanément plusieurs endomorphismes. Remarquez que dans le cas de la diagonalisabilité, elle est aussi nécessaire : si des endomorphismes sont codiagonalisables, alors ils commutent.
- Le seul fait que deux endomorphismes commutent n'implique par leur codiagonalisabilité, ni leur cotrigonalisabilité ! Il ne faut pas oublier l'hypothèse faite sur chacun des endomorphismes (diagonalisabilité ou trigonalisabilité).
- La preuve de la proposition généralise la démonstration classique de la trigonalisabilité d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé : on raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace.
- Réduire simultanément plusieurs endomorphismes est très utile lorsqu'il s'agit de les ajouter ou de les composer. La proposition permet de démontrer, par exemple, que la somme d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est encore trigonalisable, ou que la composée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent est encore diagonalisable.
- Supposons que E soit un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E (qui sont donc trigonalisables). Si les f_i commutent deux à deux, alors il existe une base orthonormée de cotrigonalisabilité.

THÉORÈME 4.12.1 - \diamond **Commutativité & Stabilité.** Soient φ et ψ deux endomorphismes qui commutent. Alors $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ sont stables par ψ .

EXERCICE 4.12.1 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\Phi_{A,B}(M) \stackrel{\text{def}}{=} AM + MB.$$

1. On suppose que la matrice A est diagonalisable et que $B = 0$. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
2. On suppose que les matrices A et B sont diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

► **SOLUTION.** 1. **1^{ère} méthode.** Nous allons utiliser l'équivalence

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exists P \in \text{Ann}(A) \text{ SARS.}$$

On remarque que $\Phi_{A,0} : M \mapsto AM$. On montre par récurrence que

$$\Phi_{A,0}^r(M) = A^r M.$$

Ainsi, si P est un polynôme, $P(\Phi_{A,0}) = \Phi_{P(A),0}$ ♦ .

Comme A est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui est un polynôme annulateur de la matrice A . Ainsi, $P(\Phi_{A,0}) = \Phi_{0,0} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$. Comme P est un polynôme scindé à racines simples qui est annulateur de $\Phi_{A,0}$, alors $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable.

2^e méthode. Nous allons utiliser l'équivalence

$$A \text{ diagonalisable} \iff \exists \text{ une base de } E \text{ formée de vep de } A.$$

Comme A est diagonalisable, il existe une base (V_1, \dots, V_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On définit en colonnes la matrices $M_{k,\ell} \stackrel{\text{def}}{=} [0 \dots 0 \ V_k \ 0 \dots 0]$ où V_k est la colonne ℓ de la matrice. En effectuant une multiplication par blocs, on vérifie que $\Phi_{A,0}(M_{k,\ell}) = AM_{k,\ell} = \lambda_k M_{k,\ell}$. On vérifie ensuite aisément que $(M_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a ainsi exhibé une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de $\Phi_{A,0}$.

2. On remarque que $\Phi_{A,0}$ et $\Phi_{0,B}$ commutent.

D'après la question précédente, $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable et on montrerait de même que $\Phi_{0,B}$ est diagonalisable. Ainsi, d'après la propriété de diagonalisation simultanée, $\Phi_{A,0}$ et $\Phi_{0,B}$ sont simultanément diagonalisables.

En notant (M_k) une base de vecteurs propres communs, alors

$$\Phi_{A,B}(M_k) = \Phi_{A,0}(M_k) + \Phi_{0,B}(M_k) = (\lambda_k + \mu_k)M_k$$

et (M_k) est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. Ainsi, $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

◁

♦ On note $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k$. Alors

$$P(\Phi_{A,0}) = \sum_{k=0}^n p_k \Phi_{A,0}^k$$

THÉORÈME 4.12.2 – Décomposition de E en somme de sous-espaces stables supplémentaires. Si E est de dimension finie non nulle et $\chi_f = \prod_{i=1}^k (f - \lambda_i)^{\alpha_i}$, alors

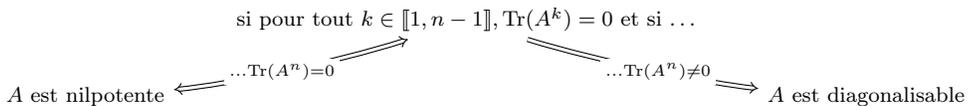
$$E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}.$$

- Les $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}$ sont supplémentaires et stables par f . Donc, dans tout base adaptée à cette décomposition, la matrice de f est diagonale par blocs.
- La restriction de f à $\text{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$ induit un endomorphisme f_i de ce sous-espace. f_i admet une et une seule valeur propre à savoir λ_i et $f_i - \lambda_i \text{Id}_{\text{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}}$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à α_i .

Source : fiche de [4].

4.13 Critère de nilpotence par la trace

Les résultats que nous allons montrer par la suite peuvent être résumés par le diagramme suivant :



Intéressons-nous d'abord à la branche de gauche.

PROPOSITION 4.13.1 – Critère de nilpotence par la trace.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(A^k) = 0$.

Source : Développement - Le théorème de BURNSIDE - vonbuhren.free.fr

■ **DÉMONSTRATION.** Raisonnons par double implication.

♦ Soit A une matrice semblable à

- (\Rightarrow) Si la matrice A est nilpotente, son spectre est réduit à 0 et donc elle est semblable à une matrice strictement triangulaire T . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice A^k est semblable à la matrice T^k dont la diagonale est nulle \blacklozenge . La trace étant un invariant de similitude, on en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(T^k) = 0$.
- (\Leftarrow) Réciproquement, supposons que la matrice A n'est pas nilpotente. On désigne par $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ les valeurs propres non nulles deux à deux distinctes de A (qui existent car le polynôme $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé) et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ leur multiplicité respective. En trigonalisant la matrice A , notre hypothèse équivaut à

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i^k = 0.$$

En effet, la valeur propre λ_i est présente m_i fois sur la diagonale. En particulier, en se limitant à $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ces relations se traduisent matriciellement par

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{\stackrel{\text{def}}{=} V} \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}}_{\stackrel{\text{def}}{=} X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

renvoyer vers la section sur Vandermonde

Ainsi $X \in \text{Ker } V$. Or la matrice V est une matrice de VANDERMONDE inversible car les λ_i sont deux à deux distinctes \blacklozenge par hypothèse. Nous aboutissons alors à une contradiction car le vecteur X est non nul. On en déduit que la matrice A est nilpotente.

Voyons une autre démonstration pour la réciproque.

Source : Critère de nilpotence par la trace et application – Philippe CALDERO

- (\Leftarrow) Montrons par récurrence que la matrice A est nilpotente. Plus précisément pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathcal{P}_n : \text{« Soit } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}). \text{ Si pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(A^k) = 0 \text{ alors la matrice } A \text{ est nilpotente ».}$$

Montrons d'abord le lemme suivant.

LEMME 4.13.1 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$. Montrons que $0 \in \text{Sp}(A)$.

On note $\chi_A(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k X^k$. D'après le théorème de CAYLEY-

HAMILTON, $\sum_{k=0}^n a_k A^k = 0$. En composant cette relation par la trace, qui est linéaire, et d'après les hypothèses,

$$a_n \times 0 + \cdots + a_1 \times 0 + a_0 \times n = 0.$$

D'où $a_0 = 0$ et $\chi_A(0) = 0$ donc 0 est racine du polynôme caractéristique de la matrice A i.e. $0 \in \text{Sp}(A)$.

Revenons à la démonstration de la récurrence.

- ▷ Initialisation pour $n = 1$: $\text{Tr}(A) = 0$ donc $A = 0$ et A est nilpotente.
- ▷ Hérédité : soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$.

D'après le lemme, $0 \in \text{Sp}(A)$. Soit u un vecteur propre de A associé à 0 et soit (u, u_2, \dots, u_n) une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors en notant B une matrice carrée de taille $n-1$,

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } A^k \sim \begin{pmatrix} 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & B^k & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

D'après les hypothèses sur la trace des matrices A^k , pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Tr}(B^k) = 0$. Ainsi, en appliquant \mathcal{P}_{n-1} , la matrice B est nilpotente. On en déduit, d'après les opérations sur les matrices par blocs, que

$$\chi_A(X) = X\chi_B(X) = X \times X^{n-1} = X^n.$$

Ainsi, d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, la matrice A est nilpotente.

□

Intéressons-nous maintenant à la branche de droite du diagramme.

PROPOSITION 4.13.2 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$ et $\text{Tr}(A^n) \neq 0$ alors la matrice A est diagonalisable.

La démonstration de ce résultat reprend la démarche de la première démonstration de la réciproque du résultat précédent.

■ **DÉMONSTRATION.** — Montrons d'abord que la matrice A possède au moins une valeur propre non nulle.

La matrice A est trigonalisable dans \mathbb{C} et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors la matrice A^n est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Or, par hypothèse, $\text{Tr}(A^n) \neq 0$ donc les λ_i ne peuvent pas être tous nuls et la matrice A possède au moins une valeur propre non nulle.

— Montrons maintenant que la matrice A possède n valeurs propres distinctes ce qui assurera sa diagonalisabilité.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les valeurs propres non nulles deux à deux distinctes de A (qui existent d'après le premier point), n_1, \dots, n_k leurs multiplicités respectives et

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_k^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,k}(\mathbb{C}).$$

Montrons que $N \stackrel{\text{def}}{=} (n_1 \cdots n_k)^\top \in \text{Ker}(V)$. On calcule

$$VN = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i n_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}\{A\} \\ \vdots \\ \text{Tr}\{A^{n-1}\} \end{pmatrix} = 0_n$$

Supposons par l'absurde que $k < n$.

Réécrivons la relation précédente en extrayant de la matrice V une matrice de VANDERMONDE carrée de taille k notée V_k :

$$VN = \begin{pmatrix} V_k \\ \star \cdots \star \\ \vdots \\ \star \cdots \star \end{pmatrix} N = 0_n$$

et

$$V_k N = 0.$$

Comme V_k est une matrice de VANDERMONDE et que les $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont deux à deux distincts alors elle est inversible et donc

$$N = 0.$$

Ainsi, la matrice A ne possède pas de valeur propre non nulle ce qui est absurde d'après le premier point.

On en déduit que $k \geq n$ et comme $k \leq n$, $k = n$. Ainsi, la matrice A possède n valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. □

On déduit des propositions 4.6 et 4.7 le résultat suivant.

PROPOSITION 4.13.3 — . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$ alors la matrice A est nilpotente ou diagonalisable.

(https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_caractéristique#Coefficients)

◆ $\det(XI_n - M) = X^n - f_1(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n f_n(M)$

où, en notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de M prises avec multiplicité,

$$f_k(M) = s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où s_k désigne le k -ème polynôme symétrique élémentaire. Source : [3] p. 114

Grâce aux identités de NEWTON, les coefficients $f_k(M)$ s'expriment comme des fonctions polynomiales des sommes de NEWTON des valeurs propres :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^j = \text{Tr}(M^j).$$

■ **DÉMONSTRATION.** à revoir

D'après les formules des sommes de NEWTON et les relations coefficients-racines ◆, le polynôme caractéristique de la matrice A a pour expression

$$\chi_A = X^n + (-1)^n \det(A).$$

Si $\det(A) = 0$, le théorème de CAYLEY-HAMILTON assure que A est nilpotente. Sinon, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable (et d'ailleurs, toutes les valeurs propres ont le même module). □

4.14 Supplémentaire stable

EXERCICE 4.14.1 Soit u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace de E . Montrer que F admet un supplémentaire stable par u .

Source : [9] p. 102

► **SOLUTION.** Considérons une base (e_1, \dots, e_p) de F et complétons cette famille libre en une base (e_1, \dots, e_n) de E avec des vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n issus d'une base de diagonalisation de u . Comme les vecteurs e_{p+1}, \dots, e_n sont des vecteurs propres associés à u , le sous-espace $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est stable par u . Comme c'est un supplémentaire de F , il répond à la question. ◀

4.15 Endomorphisme ad_u

DÉFINITION 4.15.1 – Endomorphisme ad_u . Soit u un endomorphisme de E . L'endomorphisme ad_u de $\mathcal{L}(E)$ est défini par

$$\begin{aligned} \text{ad}_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto u \circ v - v \circ u \end{aligned}$$

Source : [9] p.30

Cet endomorphisme nous sert essentiellement à mesurer le défaut de commutativité. Une première remarque dans ce sens est que le commutant de u est $\mathcal{C}(u) = \text{Ker}(\text{ad}_u)$.

EXERCICE 4.15.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Montrer que ad_A est diagonalisable.

Source : [9] p. 103

4.16 GRAIN DE RAISIN : Décomposition de DUNFORD

Trigonalisation

La diagonalisation ne permet pas de caractériser toutes les classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Lorsque le corps de base est égal à \mathbb{C} , le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours scindé et A est alors trigonalisable. Le lemme des noyaux permet même dans ce cas de trigonaliser A sous une forme diagonale par blocs avec pour chaque bloc diagonal une unique valeur propre. Cela conduit à la notion de sous-espace caractéristique et à la décomposition de JORDAN-DUNFORD : dans le cas abstrait, tout endomorphisme u d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie s'écrit de manière unique sous la forme $u = d + n$ où d est diagonalisable, n est nilpotent et commute avec d . (H.P. CPGE). Cette décomposition amène l'attention sur les classes de similitude des endomorphismes nilpotents. Avec un peu de travail il est alors possible d'obtenir le théorème de JORDAN qui règle complètement la question de la détermination des classes de similitude sur un corps algébriquement clos.

Dans le cadre général, l'outil fondamental pour élucider les classes de similitude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la notion d'endomorphisme cyclique.

Source : [4] Planche no 5. Réduction

EXERCICE 4.16.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} . Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d, n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent, n et d commutent, et $f = d + n$.

► **SOLUTION.** Posons $\chi_f \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les

valeurs propres deux à deux distinctes de f .

Soit $E'_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ (E'_k s'appelle le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k , $1 \leq k \leq p$). D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$. De plus, la restriction de f à E'_k induit un endomorphisme f_k de E'_k (car f et $(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ commutent).

On note que $(f_k - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Existence de d et n . On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k , $1 \leq k \leq p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k . Puis on définit n par $n = f - d$.

d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d . De plus, $f = d + n$.

Soit n_k l'endomorphisme de E'_k induit par n . On a $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ et par définition de E'_k , $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, on a $n_k^\alpha = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et donc $n^\alpha = 0$ (les endomorphismes n_k^α et 0 coïncident sur des sous-espaces supplémentaires). Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$ (les endomorphismes nd et dn coïncident sur des sous-espaces supplémentaires).

Unicité de d et n . Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.

L'endomorphisme d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f . Les endomorphismes d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k , $1 \leq k \leq p$ de f . Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note d_k et n_k les endomorphismes de E'_k induits par d et n respectivement.

Soient $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ puis μ une valeur propre de d_k . D'après l'**exercice 2.11**,

$$\det(f_k - \mu \text{Id}) = \det(d_k - \mu \text{Id} + n) = \det(d_k - \mu \text{Id}) = 0,$$

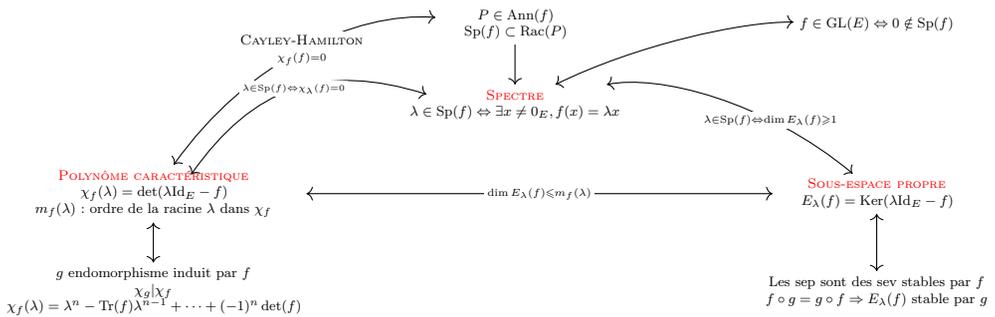
car $d_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k . Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k , on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable ♦, on a nécessairement $d_k = \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n . ◁

♦ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f . On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F .

A rajouter :

- Matrices dont le spectre est un singleton
- Endomorphismes symétriques à valeurs propres positives
- Critère de non-diagonalisabilité sur \mathbb{C}

- f diagonalisable $\iff \exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonale
 $\iff \exists \mathcal{B}$ base de E formée de vep de f
 $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f)$
 $\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_{\lambda}(f)$
 $\iff \begin{cases} \chi_f \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(f), m_{\lambda} = \dim E_{\lambda}(f) \end{cases}$
 $\iff \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda) \in \text{Ann}(f)$
 $\iff \exists P \in \text{Ann}(f)$ SARS
 $\iff f$ possède n vap distinctes
 $\iff \chi_f$ SARS
 $\iff \text{Mat}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$



ESPACES PRÉHILBERTIENS OU EUCLIDIENS

5

Lorsque E est un espace euclidien, le procédé de GRAM-SCHMIDT permet, à partir d'une base adaptée à un drapeau total de E , d'obtenir une base orthonormale adaptée à ce même drapeau.

Si l'on combine avec le théorème de trigonalisation utilisant les drapeaux, on constate que tout endomorphisme trigonalisable peut être trigonalisé dans une base orthonormale.

5.1 Déterminant de GRAM

DÉFINITION 5.1.1 – Matrice de Gram. Soient E un espace euclidien et $(x_1, \dots, x_p) \in E^n$. On définit la matrice de GRAM par

$$G(x_1, \dots, x_p) \stackrel{\text{def}}{=} (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, p \rrbracket}.$$

Le déterminant de GRAM permet de calculer des volumes et de tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs.

PROPOSITION 5.1.1 –

$$\text{Rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{Rg}(x_1, \dots, x_n)$$

Source : [4] Planche 6 Maths SPE

■ **DÉMONSTRATION.** Soient $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m \stackrel{\text{def}}{=} \dim F$. Soient $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} (e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans la base \mathcal{B} . La matrice M est une matrice rectangulaire de format (m, n) . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque la base \mathcal{B} est orthonormée, le coefficient $[M^\top M]_{i,j}$ est

$$\sum_{k=1}^m m_{k,i} m_{k,j} = \langle x_i, x_j \rangle,$$

et on a donc

$$G(x_1, \dots, x_n) = M^\top M.$$

Puisque $\text{Rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{Rg} M$, il s'agit de vérifier que $\text{Rg}(M^\top M) = \text{Rg} M$. Pour cela, montrons que les matrices M et $M^\top M$ ont le même noyau.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker} M &\implies MX = 0 \\ &\implies M^\top MX = 0 \\ &\implies X \in \text{Ker}(M^\top M) \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(M^\top M) &\implies M^\top MX = 0 \\ &\implies X^\top M^\top MX = 0 \\ &\implies (MX)^\top MX = 0 \\ &\implies MX^2 = 0 \\ &\implies MX = 0 \\ &\implies X \in \text{Ker} M. \end{aligned}$$

Finalement, $\text{Ker}(M^\top M) = \text{Ker} M$ et donc, d'après le théorème du rang,

$$\text{Rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{Rg} M = \text{Rg}(M^\top M) = \text{Rg}(G(x_1, \dots, x_n)).$$

□

PROPOSITION 5.1.2 - . La famille (x_1, \dots, x_p) est liée si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) = 0$ et est libre si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

■ **DÉMONSTRATION.** D'après (??) et puisque $M^\top M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

Source : [4] Planche 6 Maths SPE

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\iff \text{Rg}(x_1, \dots, x_n) < n \\ &\iff \text{Rg } G(x_1, \dots, x_n) < n \\ &\iff G(x_1, \dots, x_n) \notin \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ &\iff \det G(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

De plus, quand la famille (x_1, \dots, x_n) libre, avec les notations de (??), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée, inversible. On peut donc écrire

$$\det G(x_1, \dots, x_n) = \det (M^\top M) = \det(M)^2 > 0.$$

□

THÉORÈME 5.1.1 - Distance à un sous-espace vectoriel.

Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et soit (e_1, \dots, e_p) une base de F . Alors pour tout $x \in E$,

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $\pi_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F . Alors $d(x, F)^2 = x - \pi_F(x)^2$ et par PYTHAGORE,

$$x^2 = \pi_F(x)^2 + x - \pi_F(x)^2.$$

De plus,

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x, e_k \rangle = \langle \pi_F(x), e_k \rangle.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} G(e_1, \dots, e_p, x) &= \begin{vmatrix} \langle e_i, e_j \rangle & \langle e_i, x \rangle \\ \langle x, e_j \rangle & x^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle e_i, e_j \rangle & \langle e_i, \pi_F(x) \rangle + 0 \\ \langle x, e_j \rangle & \pi_F(x)^2 + x - \pi_F(x)^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Par linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne ♦ on obtient

♦ On écrit la dernière colonne sous la forme

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, \pi_F(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle e_p, \pi_F(x) \rangle \\ \pi_F(x)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x - \pi_F(x)^2 \end{pmatrix}.$$

$$G(e_1, \dots, e_p, x) = G(e_1, \dots, e_p, \pi_F(x)) + x - \pi_F(x)^2 G(e_1, \dots, e_p).$$

Comme $\pi_F(x) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, le premier terme est nul et donc

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_p, x)}{G(e_1, \dots, e_p)}.$$

□

COROLLAIRE 5.1.1 Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors,

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n x_i^2$$

avec égalité si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

Compléter avec [10] p. 185.

Source : Développement : Déterminant de GRAM – Jérôme VON BUHREN, vonbuhren.free.fr

■ **DÉMONSTRATION.**

- Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, le résultat est immédiat.
- Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ sur la propriété

\mathcal{P}_n : « pour toute famille libre (x_1, \dots, x_n) de E , on a

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n x_i^2 \text{ »}.$$

- ▷ Initialisation pour $n = 1$: soit $x_1 \in E$. Par définition, $G(x_1) = \langle x_1, x_1 \rangle = x_1^2$ donc \mathcal{P}_1 est vérifiée.
- ▷ Hérité : supposons \mathcal{P}_n vraie. Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ une famille libre de E . En notant $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, il existe $(f, \pi_F) \in F \times F^\perp$ tel que $x_{n+1} = f + \pi_F$. Par le théorème Section 5.1 on the previous page et par \mathcal{P}_n ,

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(x_1, \dots, x_n)\pi_F \leq x_1^2 \cdots x_n^2 x_{n+1}^2$$

car par le théorème de PYTHAGORE, $\pi_F \leq x_{n+1}$. On conclut que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, d'où le résultat.

cas d'égalité

□

PROPOSITION 5.1.3 – La matrice de GRAM est symétrique positive.

DÉFINITION 5.1.2 – Matrices symétriques positives. L'ensemble des matrices symétriques positives est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ équivaut à chacune des propriétés suivantes :

- pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X^T M X \geq 0$,
- $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

■ **DÉMONSTRATION.**

- La matrice de GRAM est symétrique par symétrie du produit scalaire.
- Montrons la positivité de G . Soit $X = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrons que $X^T G X \geq 0$.

$$\begin{aligned} X^T G X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \alpha_i \alpha_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \alpha_i x_i, \alpha_j x_j \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que G est symétrique positive.

□

5.2 Positivité de la matrice de HILBERT

Si on interprète le terme général de la matrice de HILBERT comme

$$H_{i,j} = \int_0^1 x^{i+j-2} dx$$

on peut y reconnaître un Déterminant de GRAM pour les fonctions puissances et le produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} de carré intégrable. Puisque les fonctions puissances sont linéairement indépendantes, les matrices de HILBERT sont donc définies positives.

Source : Planche n°14. Espaces euclidiens de [4]

5.3 Décompositions matricielles

DÉFINITION 5.3.1 – Déterminants principaux. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice obtenue à partir de A en ne gardant que les j premières lignes et les j premières colonnes. La famille $(\det A_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la famille des déterminants principaux de A .

Voir le thème 23 de [5]

THÉORÈME 5.3.1 – Décomposition LU (ou LR). Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure (*Lower*) ayant uniquement de 1 sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure (*Upper*) si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Si elle existe, une telle décomposition est unique.

Cette décomposition est utilisée en analyse numérique pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

THÉORÈME 5.3.2 – Décomposition de CHOLESKY. Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice inversible B triangulaire inférieure telle que $A = BB^T$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B .

THÉORÈME 5.3.3 – Décomposition QR. Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

COROLLAIRE 5.3.1 Décomposition d'IWASAWA
Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où Q est une matrice orthogonale, D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

THÉORÈME 5.3.4 – Décomposition polaire. Toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique définie positive.

La décomposition polaire des matrices est nommée ainsi par analogie avec celle du plan complexe : si $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un et un seul couple $(r, q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}^1$ (\mathbb{S}^1 désigne le cercle unité, ensemble des nombres complexes de module 1), tel que $z = rq$. Si z agit par multiplication sur \mathbb{C} (ou sur \mathbb{C}^*), cette action est décomposée en une rotation d'angle θ (où $q = \exp i\theta$) et une homothétie de rapport $r > 0$.

Le fait que ces deux actions commutent entre elles traduit la commutativité du groupe \mathbb{C}^* : cette propriété sera perdue dans la décomposition polaire du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, car celui-ci n'est pas abélien.

Propriété	Version complexe	Version matricielle
Homéomorphisme	$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$	$\exp: \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
Surjection continue	$\exp: i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$	$\exp: \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
A COMPLETER		

COROLLAIRE 5.3.2 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique positive.

5.3.1 Décomposition d'IWASAMA

THÉORÈME 5.3.5 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il existe un unique couple (O, T) tel que :

$$M = OT,$$

avec O une matrice orthogonale et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Comme M est inversible, c'est une matrice de changement de base. Le produit et l'inversibilité sont stables dans \mathcal{T}_n^+ .

PROPOSITION 5.3.1 – Le procédé de GRAM-SCHMIDT. Soit E un espace vectoriel préhilbertien et soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille libre dans E ; il existe une unique famille orthonormale $\mathcal{G} = (\varepsilon_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) &= \\ & \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k), \\ & \langle e_k, \varepsilon_k \rangle > 0. \end{aligned}$$

La famille \mathcal{G} est appelée l'orthonormalisée (de GRAM-SCHMIDT) de \mathcal{F} .

■ DÉMONSTRATION. — Existence.

On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n . Soit $\mathcal{C} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (C_1, \dots, C_n)$ la famille des vecteurs colonnes de la matrice M exprimés dans \mathcal{B} . Comme M est inversible, \mathcal{C} forme une base de \mathbb{R}^n . Appliquons-lui le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_O \stackrel{\mathrm{def}}{=} (O_1, \dots, O_n)$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_i) = \mathrm{Vect}(O_1, \dots, O_i) \quad (1) \quad \text{et} \quad \langle C_i, O_i \rangle > 0 \quad (2).$$

On écrit

$$M = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_O} \times P_{\mathcal{B}_O \rightarrow \mathcal{C}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} OT.$$

La matrice O est une matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée, elle est donc orthogonale. Le caractère triangulaire de la matrice T vient de (1) et la stricte positivité des termes sa diagonale de (2).

— Unicité.

Supposons qu'il existe deux décompositions d'IWASAMA. Soit $M = OT = O'T'$. T est inversible. $(O')^{-1}O = T'T^{-1}$. Le premier terme est une matrice orthogonale et le second triangulaire

supérieure car ces deux ensembles sont des groupes multiplicatifs.
 $B = T'T^{-1}$ est diagonale (schéma) de coeff...

□

5.4 Inégalité d'HADAMARD

THÉORÈME 5.4.1 – Inégalité d'HADAMARD. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soient X_1, \dots, X_n ses vecteurs colonnes. Alors,

$$|\det M| \leq \prod_{i=1}^n \|X_i\|$$

avec égalité si et seulement si la famille $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale.

Voyons deux démonstrations de ce résultat ; une première en utilisant la décomposition d'IWASAMA et une deuxième le 5.1.

■ **DÉMONSTRATION.** — Si la matrice M n'est pas inversible alors $\det M = 0$ et comme une norme est à valeurs positives, le résultat est immédiat.

— Supposons que M est inversible. D'après la décomposition d'IWASAMA, il existe une matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C})$ et $T \stackrel{\text{def}}{=} (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $M = OT$. D'après la multiplicité du déterminant,

$$\det M = \det(O) \det(T).$$

Or $\det O = \pm 1$ donc

$$|\det M| = |\det T| = \prod_{i=1}^n |t_{i,i}|. \quad (5.1)$$

Par construction, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_{i,i} \stackrel{\text{def}}{=} \langle X_i, O_i \rangle$ où O_i est un vecteur unitaire. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|t_{i,i}| = |\langle X_i, O_i \rangle| \leq X_i \underbrace{O_i}_{=1}.$$

Ainsi d'après (5.1),

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n X_i.$$

cas d'égalité

□

■ **DÉMONSTRATION.** — Si la matrice M n'est pas inversible, le résultat est immédiat.

— Supposons que M est inversible. On a

$$M^T M = G(X_1, \dots, X_n),$$

la matrice de GRAM de la famille des colonnes de la matrice M . En composant cette relation par le déterminant,

$$\det(M^T M) = \det(G(X_1, \dots, X_n)) = \det(M)^2$$

car $\det(M^T) = \det M$. D'après le (??),

$$\det G(X_1, \dots, X_n) \leq \prod_{i=1}^n X_i^2$$

$$\text{soit } \det(M)^2 \leq \prod_{i=1}^n X_i^2$$

En passant à la racine on obtient l'inégalité d'HADAMARD. □

DÉFINITION 5.4.1 – Paralléloétope. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille libre. Le paralléloétope engendré par cette famille est défini par

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid \forall i \ t_i \in [0, 1] \right\}.$$

L'inégalité d'HADAMARD nous apprend que le volume du paralléloétope défini par les vecteurs colonnes est inférieur ou égal au produit des normes de ses vecteurs et il y a égalité si et seulement si la matrice est diagonale, ou encore que le paralléloétope est rectangle.

PROPOSITION 5.4.1 – Soient $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n symétriques à valeurs propres strictement positives et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors,

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

EXERCICE 5.4.1

1. Soit $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Montrer que $B = (\gamma_i \gamma_j a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\det(A)^{1/n} \leq \frac{\text{Tr}(A)}{n}$.
On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique.
3. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} > 0$. On pose $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}$.
En déduire l'inégalité d'HADAMARD.

Source : exercice 4, TD 14 [5]

PROPOSITION 5.4.2 – Inégalité arithmético-géométrique. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, \dots, x_n des réels positifs. Alors,

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Pour d'autres inégalités, lire le chapitre 16, p.117 de la deuxième édition de *Raisonnements divins* (en fr)

5.5 Familles de polynômes orthogonaux

Soient I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $w \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que, pour tout entier naturel n , $\int_I |x|^n w(x) dx$ converge. On note

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \mid \int_I f^2 w \text{ converge} \right\}.$$

Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_I P(t)Q(t)w(t) dt.$$

5.5.1 Construction

EXERCICE 5-5-1

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$,
 - pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n \neq m$, $\langle P_n, P_m \rangle = 0$,
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire.

Soit n un entier naturel.

3. Montrer que $\text{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
4. Montrer que $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

Source : [5] (Exercice 17 Ch 13)

► SOLUTION.

Source : Solution de [5]

1. ▷ Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie. D'une part, PQw est une fonction continue sur I .

De plus, $|PQ| \leq \frac{P^2+Q^2}{2}$. Comme w est à valeurs positives, alors

$$|PQw| \leq \frac{1}{2} [P^2w + Q^2w].$$

Comme P^2w et Q^2w sont intégrables sur I , d'après les théorèmes de comparaison, PQw est intégrable sur I .

- ▷ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien symétrique par commutativité du produit de deux polynômes.
- ▷ est bilinéaire par linéarité des intégrales convergentes.
- ▷ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $w \geq 0$, par croissance de l'intégrale,

$$\int_I P(x)^2 w(x) dx \geq 0.$$

De plus, si $\int_I P^2 w = 0$, comme P est une fonction polynomiale donc continue et w est continue, d'après la positivité de l'intégrale,

$$\forall t \in I, P(t)^2 w(t) = 0.$$

De plus, w est à valeurs strictement positives, donc

$$\forall t \in I, P(t) = 0.$$

Ainsi, P possède une infinité de racines distinctes et P est le polynôme nul.

Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire définie positive, donc elle définit un produit scalaire.

2. La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT à cette famille, on construit une famille de polynôme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$P_n \stackrel{\text{def}}{=} X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j P_j.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$ et P_n est unitaire.

De plus, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n, \langle P_n, P_m \rangle = 0.$$

3. D'après le procédé de GRAM-SCHMIDT, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(P_0, \dots, P_n) &= \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \\ &= \mathbb{R}_n[X]. \end{aligned}$$

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question précédente, il existe $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^n \mu_k P_k.$$

Alors, par linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P \rangle &= \sum_{k=0}^n \mu_k \langle P_k, P_{n+1} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

◁

5.5.2 Racines

EXERCICE 5.5.2 On note $(\alpha_i)_{i \leq i \leq k}$ les racines de P_n qui appartiennent à I et qui sont de multiplicité impaire. On pose

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i).$$

1. Majorer le degré de Q .
2. Déterminer le signe de $P_n Q$ sur I .
3. En déduire que $k = n$ et que P_n a toutes ses racines réelles et simples dans I .

► **SOLUTION.** Nous allons montrer que P_n admet au moins n changements de signe dans I . C'est pour cela que nous considérons les racines de multiplicité impaire, ce sont elles qui correspondent aux changements de signe.

1. Comme $\deg P_n = n$, le polynôme P_n possède au plus n racines réelles distinctes. Ainsi, $\deg Q \leq n$.
2. En notant a_1, \dots, a_p les racines réelles distinctes de P , on écrit sous forme irréductible :

$$P_n = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{r_i} \prod_{i=1}^s (X^2 + b_i X + c_i)^{\ell_i}.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $d_i \in \mathbb{R}$ non nul tel que

$$P_n(x) \underset{\alpha_i}{\sim} d_i (x - a_i)^{r_i}.$$

Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il existe $\tilde{d}_i \in \mathbb{R}$ non nul tel que

$$P_n(x)Q(x) \underset{\alpha_i}{\sim} \tilde{d}_i (x - \alpha_i)^{r_i+1}.$$

Comme r_i est impair, le polynôme $P_n Q$ ne change pas de signe au voisinage de α_i .

De plus, si a_i est une racine de P_n de multiplicité paire, alors P_n

ne change pas de signe au voisinage de a_i , d'après la première question.

Finalement, $P_n Q$ garde un signe constant sur I .

3. Supposons par l'absurde que $k < n$. Alors, $Q \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, d'après la question 4., $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle P_n, Q \rangle &= 0 \\ \int_I P_n(t)Q(t)w(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $P_n Q w$ est une fonction continue et de signe constant. Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $P_n Q w = 0$ sur I . Comme w est à valeurs strictement positives,

$$\forall x \in I, P_n(x)Q(x) = 0.$$

Ainsi, $P_n Q$ possède une infinité de racines soit $P_n Q = 0$. Or $Q \neq 0$, soit $P_n = 0$, ce qui est absurde. Finalement, $k = n$ ♦ et $\deg Q = n$, donc toutes les racines de P_n sont simples et appartiennent à I .

♦ P_n a au moins n changements de signe sur I ; par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n a au moins n racines dans I et comme P_n est de degré n , il y a exactement n racines simples. ◁

5.5.3 Relation de récurrence

EXERCICE 5.5.3

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_{n-1}, X P_{n-1})$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\text{On note } P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k + \alpha_n X P_{n-1}.$$

2. Montrer que, pour tout $j \in [0, n-3]$, $\alpha_j = 0$.
3. En déduire qu'il existe trois suites réelles (a_n) , (b_n) et (c_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = (a_n X + b_n) P_{n+1} + c_n P_n.$$

- **SOLUTION.** 1. $(P_0, \dots, P_{n-1}, X P_{n-1})$ est une famille de $n+1$ polynômes appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et de degrés échelonnés. Ainsi, $(P_0, \dots, P_{n-1}, X P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $j \leq n-3$. D'après les définitions,

$$\begin{aligned} \langle X P_{n-1}, P_j \rangle &= \int_I t P_{n-1}(t) P_j(t) dt \\ &= \underbrace{\langle X P_j, P_{n-1} \rangle}_{\in \mathbb{R}_{n-2}[X]} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 4., $P_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]^\perp$.
Alors, comme (P_0, \dots, P_n) est orthogonale,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_n, P_j \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle P_k, P_j \rangle + \langle X P_{n-1}, P_j \rangle \\ &= \alpha_j P_j^2. \end{aligned}$$

Comme $P_j \neq 0$, alors $\alpha_j = 0$.

3. D'après la question précédente, il existe $(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha_{n-2}P_{n-2} + \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_nXP_{n-1} \\ &= (\alpha_nX + \alpha_{n-1})P_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2.

<

Source : [1] p. 155

EXERCICE 5.5.4 Soient $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes orthogonaux. Montrer que $\sum \langle f, P_n \rangle^2$ converge et prouver l'égalité de PARSEVAL :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}), f^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, P_n \rangle^2.$$

► SOLUTION.

<

5.5.4 Équation différentielle

Source : Polynômes orthogonaux – Fabien Pucci

Soient a et b deux fonctions définies sur un intervalle $I \stackrel{\text{def}}{=}]\alpha, \beta[$ de \mathbb{R} borné ou non, avec $\alpha > 0$ sur I . On se propose d'étudier les valeurs propres de l'opérateur différentiel :

$$T(y) \stackrel{\text{def}}{=} ay'' + by'. \tag{5.2}$$

On introduit pour cela une fonction résolvante w à valeurs strictement positives sur I qui permet d'écrire l'opérateur T sous une forme dont nous verrons bientôt l'utilité

$$\begin{aligned} T(y) &= \frac{1}{w} (awy')' \\ &= \frac{1}{w} (a'wy' + aw'y' + awy'') \\ T(y) &= ay'' + a'y' + \frac{aw'}{w}y'. \end{aligned}$$

En égalisant avec 5.2, la fonction w doit être solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$aw' + (a' - b)w = 0,$$

donc de la forme $w = e^A$, où A est une primitive de $\frac{b-a'}{a}$.

On voit alors que pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_I f(x)g(x)w(x) dx$, on a :

$$\langle T(f), g \rangle = \int_I (awf')'(x)g(x) dx = [awf'g]_I - \int_I a(x)w(x)f'(x)g'(x) dx.$$

Si de plus la fonction aw s'annule aux bornes de I (ou tend vers 0 en ses bornes si I est infini), on a par intégration par parties

$$\langle T(f), g \rangle = - \int_I a(x)w(x)f'(x)g'(x) dx = \langle f, T(g) \rangle,$$

autrement dit, l'opérateur T est symétrique.

Bien sûr, il faudrait préciser un peu les hypothèses sur les fonctions a et b pour que tout cela ait un sens, et en particulier préciser sur quel domaine est défini le produit scalaire précédent.

Nous nous limiterons ici au cas où a et b sont des fonctions polynomiales de la forme

$$a(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{et} \quad b(x) \stackrel{\text{def}}{=} b_1x + b_0.$$

Dans ce cas, l'opérateur T est, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une application linéaire de l'espace \mathcal{P}_n des fonctions polynomiales de degré inférieur à n dans lui-même et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini sur cet espace si $\int_I |x|^k w(x) dx$ converge pour tout $k \leq n$.

Sous cette hypothèse, \mathcal{P}_n muni de ce produit scalaire est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n + 1$, et l'opérateur T est un endomorphisme symétrique de cet espace. Il existe alors une base orthonormée de \mathcal{P}_n constituée de vecteurs propres de T .

En particulier, il existe au moins un vecteur propre P_n de degré n , qu'on peut choisir unitaire, et qui vérifie donc :

$$T(P_n) = \lambda_n P_n \iff aP_n'' + bP_n' = \lambda_n P_n.$$

En considérant le terme de degré n dans cette égalité, on obtient :

$$\lambda_n = n(a_2(n-1) + b_1).$$

On sait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Il en résulte que si les valeurs propres λ_n sont toutes distinctes, les polynômes P_n seront deux à deux orthogonaux i.e.

$$\int_I P_n(x)P_m(x)w(x) dx = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

Ce sera le cas si l'équation :

$$a_2n(n-1) + b_1n = a_2m(m-1) + b_1m \iff (n-m)(a_2(n+m-1) + b_1) = 0$$

n'admet pas de solutions entières positives (n, m) avec $n \neq m$.

REMARQUE 5.5.1 On peut bien sûr ajouter à l'opérateur T un terme cy , avec c constant, sans changer la symétrie de T , ni les vecteurs propres. On en fait alors que translater les valeurs propres.

5.5.5 Conclusion

Pour chaque choix de w , on construit ainsi un produit scalaire appelé *produit scalaire usuel avec poids w* sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Pour chacun de ces choix, l'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT appliqué à la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ fait apparaître des familles de polynômes orthogonaux.

C'est ainsi qu'il existe beaucoup de familles connues de polynômes orthogonaux dont l'introduction a été motivée par la résolution d'équations différentielles issues de la physique. Ces familles de polynômes sont aussi utilisées, via les formules de quadrature, pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Le tableau ci-dessous rassemble quelques exemples de ces familles.

Nom	I	$w(x)$	Relation de récurrence	Équation différentielle
LEGENDRE	$[-1, 1]$	1	$(n+2)L_{n+2} = (2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$
TTCHEBYCHEV	$] -1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
LAGUERRE	\mathbb{R}_+	e^{-x}	$(n+2)L_{n+2} = (-X+2n+3)L_{n+1} - (n+1)L_n$	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
HERMITE	\mathbb{R}	e^{-x^2}	$H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n$	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$

5.6 Rayon spectral d'une matrice

DÉFINITION 5.6.1 – Rayon spectral. Soient $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit le *rayon spectral* de la matrice M par

$$\rho(M) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \}.$$

EXERCICE 5.6.1 Montrer que $M^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ implique $\rho(M) < 1$.

Montrer la réciproque dans les situations successives :

- M est diagonalisable ;
- M ne possède qu'une unique valeur propre complexe ;
- $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\rho(M) < 1$.

Source : [1] p. 182

5.7 Caractérisation des projecteurs orthogonaux

PROPOSITION 5.7.1 – Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E . Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$,

$$p(x) \leq x.$$

■ **DÉMONSTRATION.** (\Rightarrow) Il existe F un sev de E tel que p soit la projection sur F parallèlement à F^\perp . On décompose tout vecteur de E comme la somme unique d'un élément de F et de F^\perp puis on applique le théorème de PYTHAGORE.

(\Leftarrow) — Raisonner par l'absurde. Soit F et G tels que p soit la projection sur F parallèlement à G . Considérer un vecteur de $G^\perp \setminus F$ et aboutir à une contradiction.

— Soit p une projection telle que pour tout $x \in E$, $p(x) \leq x$. Nous allons poser un vecteur dont la composante selon $\text{Im } p$ sera variable. Soit $x \in \text{Ker } p$ et $y \in \text{Im } p$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ty \leq x + ty &\Leftrightarrow t^2 y^2 \leq x + ty^2 \\ &\Leftrightarrow t^2 y^2 \leq x^2 + t^2 y^2 + 2t \langle x, y \rangle \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2t \langle x, y \rangle \geq 0 \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \text{ car cette inégalité est vraie pour tout } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux et p est un projecteur orthogonal. □

Source : Exos incontournables SUP

Source : Ellipses p.176

5.8 Famille obtusangle

DÉFINITION 5.8.1 – Famille obtusangle. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E . On dit que cette famille est *obtusangle* si et seulement si pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$.

EXERCICE 5.8.1 Soit E un espace vectoriel de dimension n non nulle et soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle de E . Montrer que $p \leq n + 1$.

► **SOLUTION.**

◁ Source : Planche no 7. Espaces euclidiens

5.9 Exercice 6.28 du ELLIPSES

EXERCICE 5.9.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $B = A^\top A$ est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale semblable à B .

► **SOLUTION.** — On montre facilement que B est symétrique et comme cette matrice est réelle, elle est diagonalisable.

— Toutes les lignes de B sont proportionnelles, et colinéaires à A ; donc B est de rang 1 et $\dim E_0(B) = n - 1$; la deuxième valeur propre de B est : $\text{Tr}(B) = \sum_{k=1}^n a_k^2$ en posant $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Enfin, $\text{Diag} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2, 0, \dots, 0 \right)$ est semblable à B .

MÉTHODE 5.9.1 ...

◁

5.10 Exercice

EXERCICE 5.10.1 Vrai ou faux : « les matrices carrées et symétriques à coefficients dans \mathbb{C} sont diagonalisables. »

Source : RMS 132 3. Agrégation Interne de Mathématiques (première épreuve 2022)

Commençons par démontrer le lemme suivant.

LEMME 5.10.1 Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente diagonalisable.

Alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Or A est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = PD^pP^{-1} = 0$. Donc $D^p = 0$ soit $D = 0$ et $A = 0$.

On peut aussi dire qu'une matrice ayant une unique valeur propre (comme c'est le cas des matrices nilpotentes) est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale. □

► **SOLUTION.** Cette affirmation est fausse.

En effet en taille 2, la matrice $A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique et

non nulle; elle vérifie $A^2 = 0$. Or d'après le lemme, une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable. En taille $n > 2$ la matrice B telle que $[B]_{i,j} = [A]_{i,j}$ si $1 \leq i, j \leq 2$ et $[B]_{i,j} = 0$ sinon est elle aussi symétrique, nilpotente et non nulle et n'est donc n'est pas diagonalisable. \triangleleft

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A rajouter :

- Extremums d'une fonction sur les fonctions continues
- Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif
- Endomorphismes et matrices antisymétriques

ESPACES VECTORIELS NORMÉS, SUITES

6

6.1 e est irrationnel

PROPOSITION 6.1.1 – . Le nombre $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ est irrationnel.

La démonstration suivante est due à Joseph FOURIER (1815).

Une version de la preuve est dans Proofs from the BOOK (p.47)

■ **DÉMONSTRATION.** Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers a et b non nuls tels que $e = \frac{a}{b}$. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$n!b e = n!a.$$

Le terme de droite est un entier et le terme de gauche s'écrit ♦

$$n!b \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots \right)$$

$$\diamond e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

qui se décompose en la somme d'un entier

$$bn! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

et d'un second membre

$$b \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right).$$

Or ce second membre n'est pas entier car pour $n > 1$,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi le membre de gauche n'est pas entier et on aboutit à une contradiction. On en déduit que le nombre e est irrationnel. □

J. LIOUVILLE montre en 1840 que e^2 est également irrationnel. (à compléter) Charles HERMITE montre en 1873 que e est transcendant

6.2 Autour du lemme de CESÀRO

6.2.1 Lemme de CESÀRO, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$

EXERCICE 6.2.1 Déterminer une suite simple, équivalente à la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sin u_n.$$

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** On pourra déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ est convergente vers une limite non nulle, puis appliquer le lemme de CESÀRO. ◁

DÉFINITION 6.1.1 – Nombre transcendant.

Source : [1] p. 227

6.2.2 Une variante de CESÀRO

EXERCICE 6.2.2 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers ℓ . On définit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Grossièrement on voit que « ça marche » car

$$v_n \rightarrow \frac{1}{2^n} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}}_{=2^n} \times \ell = \ell.$$

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** La méthode consiste à se ramener au cas où $\ell = 0$ en posant deux suites auxiliaires $u'_n = u_n - \ell$ et $v'_n = v_n - \ell$. La démarche est en suite analogue à la démonstration du Lemme de CESÀRO. ◀

6.3 Normes ℓ^p et inégalités

La suite définit une norme sur \mathbb{K}^n et établit une généralisation de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Le produit scalaire sur \mathbb{K}^n est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DÉFINITION 6.3.1 — . Soit $u \in \mathbb{K}^n$. Pour tout réel $p \geq 1$, on définit l'application $\| \cdot \|_p$ par

$$\|u\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

DÉFINITION 6.3.2 – Norme. L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si

- (i) **Séparabilité** : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
- (ii) **Homogénéité** : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
- (iii) **Inégalité triangulaire** : $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

PROPOSITION 6.3.1 – Normes ℓ^p . Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'application $x \mapsto \|x\|_p$ définit une norme sur \mathbb{K}^n .

PROPOSITION 6.3.2 – Inégalité de MINKOWSKI. En particulier, on a l'*inégalité de MINKOWSKI*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Pour montrer que l'application $\| \cdot \|_p$ définit bien une norme sur \mathbb{K}^n , il faut entre autre montrer qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire et pour montrer cela nous allons d'abord démontrer l'inégalité de HÖLDER :

PROPOSITION 6.3.3 – Inégalité de HÖLDER. En outre, on a l'*inégalité de HÖLDER* : soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p et q sont *conjugués*). Pour tout $u, v \in \mathbb{K}^n$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

■ **DÉMONSTRATION.**

— Un lemme fondamental :

D'après la concavité de la fonction logarithme,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) \geq \frac{\ln(x^p)}{p} + \frac{\ln(y^q)}{q} = \ln(xy).$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

— Un cas particulier crucial :

Nous démontrons pour le moment l'inégalité dans le cas où

$$\sum_{k=1}^n |u_k|^p = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n |v_k|^q = 1.$$

D'après le lemme, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|u_k| |v_k| \leq \frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q}.$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n , on obtient le résultat.

— Raisonnement par homogénéité :

Pour obtenir le cas général, il suffit d'appliquer le cas particulier avec

$$|u'_k| = \frac{u_k}{\|u\|_p} \text{ et } |v'_k| = \frac{v_k}{\|v\|_p}.$$

□

REMARQUE 6.3.1 Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur \mathbb{K}^n .

(lire aussi *Chapitre 4 - Normes* page 39 [11])
Exercice 4.81 page 377 [12]

■ **DÉMONSTRATION.** Tout d'abord, on s'assure que $\|\cdot\|_p$ est bien à valeurs positives.

(I) **Séparabilité :**

(\Leftarrow) Immédiat.

(\Rightarrow) Soit $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\lambda u\|_p = 0$. Alors

$$\sum_{k=1}^n |\lambda u_i|^p = 0$$

qui est une somme de termes positifs donc chacun des termes est nul et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$$

ce qui assure que $u = 0$.

(II) **Homogénéité :** soient $u \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\|\lambda u\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda u_i|^p \right)^{1/p} \dots$$

(III) **Inégalité triangulaire :** Soient $u, v \in \mathbb{K}^n$, montrons que

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$|u_k + v_k|^p = |u_k| \times |u_k + v_k|^{p-1} + |v_k| \times |u_k + v_k|^{p-1}$$

et sommer pour k allant de 1 à n . Appliquer le résultat précédent à chaque somme, factoriser et multiplier l'inégalité par une somme judicieuse.

□

Source : Proposition 4.1.3. [11]

PROPOSITION 6.3.4 – . Toutes les normes de $E = \mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Par exemple :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq p^{1/p} \|x\|_\infty$$

ANALYSE

Bien avant qu'elle ne soit conceptualisée, on a utilisé des itérations où est sous-jacente la notion de suite. Par exemple, ARCHIMÈDE quand il cherche une valeur approchée de π considère les suites (p_n) et (P_n) des périmètres des polygones inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 et aboutit à des formules qui équivalent à $p_{2n} = \sqrt{p_n P_n}$ et $P_{2n} = \frac{2P_n p_{2n}}{p_{2n} + P_n}$.

La théorie des suites au sens moderne est établie au début du XIX^e siècle quand s'affirme la volonté de donner à l'analyse des bases rigoureuses qui la débarrassent des notions métaphysiques d'infiniment petits ou de quantités évanouissantes. Dans ses Notions fondamentales de la théorie des suites, rédigée vers 1800 et restées inédites, GAUSS donne la définition moderne d'une suite (application de \mathbb{N} dans \mathbb{R}). Il définit les notions de majorant et de borne supérieure d'une suite. Plus intéressant encore, il donne les définitions de la limite supérieure et de la limite inférieure d'une suite ($\limsup a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{p \geq n} a_p$ et

$\liminf a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{p \geq n} a_p$, dans le langage d'aujourd'hui) et, quand ces deux quantités sont égales, appelle leur valeur commune la limite de la suite.

C'est le Cours d'analyse de CAUCHY (1821) qui ouvre la voie à l'analyse moderne. Dans le chapitre des Préliminaires, il donne les définitions d'une suite et de la limite d'une suite, les premières définitions précises de $+\infty$ et $-\infty$, introduit la notion de valeur d'adhérence. Le « critère de CAUCHY » de convergence, déjà connu de BOLZANO est explicité pour les séries.

Pendant une grande partie du XIX^e siècle, la convergence d'une suite de CAUCHY ou d'une suite croissante majorée sont présentés comme des axiomes qui constituent le fondement de toutes les questions où intervient la notion de limite. Ce point de vue va être remis en cause par MÉRAY (1868) puis par CANTOR (1872) qui, voulant en donner des justifications précises, contruisent \mathbb{R} à partir des suites de CAUCHY de \mathbb{Q} .

La théorie des suites réelles dont tous les concepts sont parfaitement définis depuis la fin du XIX^e a connu récemment des développements importants avec l'étude des systèmes dynamiques, qui apportent un regard nouveau sur les suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est continue et si la suite converge, sa limite ℓ est nécessairement un point fixe de f . Ce fait, démontré par CAUCHY, est à la base de toutes les méthodes numériques itératives. L'intérêt pour telles suites est ancien. Dans le traité De la méthode des fluxions et des suites infinies (1740), pour obtenir une valeur approchée d'une solution de l'équation $g(x) = 0$. NEWTON expose ce qu'on appelle depuis « méthode de NEWTON » : prenant a_0 proche de la solution de l'équation, on considère une suite vérifiant

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}.$$

C'est lors de l'étude de certains systèmes dynamiques discrets * qu'est apparue la notion de chaos, qui a connu ces dernières décennies un

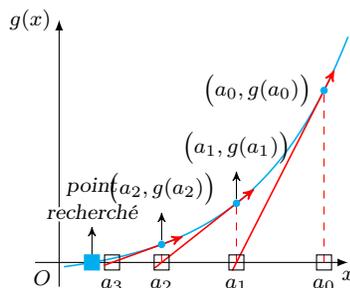


Illustration de la méthode de NEWTON

*. Qui revient à l'étude du comportement des applications itérées $f^n : X \rightarrow X$.

grand succès. Pour des fonctions f très simples (par exemple une fonction trinôme), le système dynamique peut avoir un comportement qui semble aléatoire. L'exemple le plus connu est la suite logistique vérifiant une relation de la forme

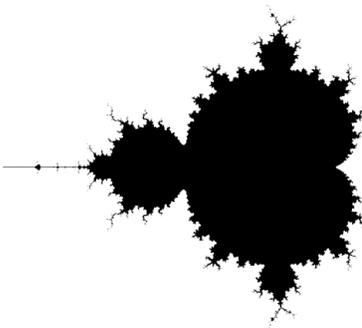
$$u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n - \alpha u_n^2.$$

Cette suite a été utilisée par VERHULST en 1845 pour décrire un modèle de croissance de la population. Pour $0 < \alpha \leq 2$ et une population u_0 pas trop importante, la suite (u_n) converge vers la population stable 1. Mais comme l'a démontré en 1963 le météorologue E. N. LORENZ, pour des valeurs plus grandes de α , cette loi décrit certains aspects des flux turbulents.

Dans les années 1980, de grands progrès ont été accomplis dans l'étude de ces systèmes dynamiques grâce à la puissance des ordinateurs. Par exemple, pour la suite logistique, on observe que, pour $2 < \alpha < 2,5$, le comportement de la suite tend vers une oscillation régulière entre deux valeurs (cycle d'ordre 2); puis pour $2,5 \leq \alpha < 2,55$, vers un cycle d'ordre 4; ensuite quand α augmente, vers des cycles d'ordres 8, 16, ... Au-delà de 2,57 environ, le système devient chaotique. FEIGENBAUM a montré en 1981 que, pour une classe assez large d'applications f de $[-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ et $f_\lambda = \lambda f, 0 < \lambda < 1$, le système dynamique défini par $u_{n+1} = f_\lambda(u_n)$ a un comportement comparable : il existe une suite croissante de valeurs λ_j du paramètre λ pour lesquelles la dynamique change (le nombre de points d'un cycle double quand λ , supposé passage de λ_j) jusqu'à une valeur critique λ_∞ , de telle manière que $\frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1}}$ tende vers $\delta = 4,669\dots$, constante universelle indépendante de f . Au-delà de λ_∞ , on retrouve des cycles stables de période $3 \cdot 2^j$ et des points de bifurcation.

On s'est aussi intéressé à l'itération de fonction complexes, en particulier les fonction $f : x \mapsto x^2 + c$, où $c \in \mathbb{C}$. On étudie l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la suite de premier terme z est bornée. On note K_c cet ensemble, et on l'appelle ensemble de JULIA. Sa frontière présente des formes très belles et très variées selon les valeurs de c . Les premiers résultats, établis entre 1905 et 1920, sont dus à FATOU et JULIA (évidemment sans aucun moyen informatique). En 1980, MANDELBROT étudia l'ensemble des points c pour lesquels 0 est dans K_c (le célèbre ensemble de MANDELBROT).

L'ensemble de MANDELBROT



Les ensembles de JULIA ont les propriétés des fractales, en particulier l'autosimilarité. En revanche, l'ensemble de MANDELBROT est extraordinairement varié : plus l'échelle est grande, plus l'image se complique. On a montré un caractère universel de l'ensemble de MANDELBROT : pour diverses fonctions complexes à un paramètre, on trouve des copies déformées de cet ensemble.

Séries numériques (orax x-ens)

Dans une tentative d'histoire des séries numériques, nous pourrions faire remonter leurs origines aux travaux développés dès la fin du XVII^e siècle autour du comportement asymptotique de sommes du type

$$\sum_{k=1}^n f(k).$$

Quelques années après les travaux de BERNOULLI sur ce sujet,

EULER et MAC-LAURIN produisent indépendamment une « formule sommatoire » obtenue par inversion d'identités tayloriennes :

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f + \frac{f(0) + f(n)}{2!} + \frac{f'(n) - f'(0)}{3!} - \frac{f'''(n) - f'''(0)}{6!} \dots$$

Si l'expression générale donnant les coefficients de cette formule leur échappe dans un premier temps, EULER établit leur lien avec les coefficients du développement en série de $\frac{x}{e^x-1}$ et les nombres de BERNOULLI,

introduits par celui-ci dans le calcul des sommes $\sum_{k=1}^n k^p$ ♦. EULER en

déduit, par de jolis calculs, les sommes des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}}$ pour s entier naturel non nul ♦. Cependant, le problème de la convergence des sommes en question n'est jamais au centre de leurs réflexions et l'aspect formel l'emporte, ce qui conduit parfois les plus grands mathématiciens du siècle à commettre de lourdes erreurs. Vers 1768, D'ALEMBERT commence à douter de la validité de l'emploi de séries non convergentes. En 1826, le mot d'ABEL illustre parfaitement cette nouvelle préoccupation :

« Les séries divergentes sont des inventions du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes » (Œuvres, 1881). Mais ce sont les nécessités du calcul numérique qui imposent vraiment un effort de rigueur dont GAUSS, s'étant fait une idée claire de la notion de limite, sera le principal artisan. À partir de là, il paraît naturel d'établir des critères simples de convergence : on en doit plusieurs à CAUCHY, et notamment celui qui porte son nom : si la suite de réels positifs $(a_n)_{n \geq 0}$ est telle que la limite supérieure de $\sqrt[n]{a_n}$ est strictement inférieure à 1, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

(il y a une suite)

♦ En notant b_k les nombres de BERNOULLI,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} b_k \frac{n^{m+1-k}}{m+1-k}.$$

Pour $|x| < 2\pi$,

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \frac{x^k}{k!}.$$

♦ Soit $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2s}} = \frac{|b_{2s}| (2\pi)^{2s}}{2(2s)!}.$$

7.1 Lemme de CESÀRO

LEMME 7.1.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers ℓ . Alors la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ converge aussi vers ℓ .

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (u_n) converge vers ℓ , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) \right| \\ \text{par l'inégalité triangulaire} &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell|}_{\stackrel{\text{def}}{=} K} + \sum_{k=n_0}^n \underbrace{|u_k - \ell|}_{\leq \varepsilon} \right) \\ &\leq \frac{K}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{n} = 0$ donc il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\left| \frac{K}{n} \right| \leq \varepsilon$.
Ainsi pour tout $n \geq \max\{n_0, n_1\}$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell \right| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ . □

REMARQUE 7.1.1 La réciproque du lemme de CESÀRO est fausse. Une suite (u_n) peut converger au sens de CESÀRO i.e. $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge sans pour autant que la suite (u_n) converge. Par exemple la suite $\left((-1)^n \right)_n$.

7.2 Série harmonique & Constante d'EULER

DÉFINITION 7.2.1 – Série harmonique.

$$H_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

PROPOSITION 7.2.1 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

PROPOSITION 7.2.2 - Équivalent de la série harmonique.
 $\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$ et

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

DÉFINITION 7.2.2 - Constante d'EULER. La constante d'EULER γ est définie par :

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)) \approx 0,577\,215\,664\dots$$

PROPOSITION 7.2.3 - Développement asymptotique de la série harmonique.

$$H_n =_{n \rightarrow +\infty} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

■ DÉMONSTRATION.

Poser $v_n = H_n - \ln(n)$

Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)}_{\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)} \end{aligned}$$

On peut aussi montrer...

... la décroissance de la suite (v_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n - v_{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1}$$

Deux méthodes :

— On transforme $\ln(n+1) - \ln(n)$ en intégrale :

$$v_n - v_{n+1} = \int_n^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{n+1}\right)}_{\geq 0} dt > 0.$$

THÉORÈME 7.2.1 - Comparaison série / intégrale. [5] ch 2.

Soit f une fonction continue par morceaux, décroissante de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Alors, la série de terme général

$$w_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

est convergente. En particulier, $\sum f(n)$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

MÉTHODE 7.2.1 Le théorème de comparaison série / intégrale permet

- de montrer qu'une série converge ou diverge,
- d'obtenir un équivalent d'une somme partielle de série divergente,
- d'obtenir un équivalent du reste d'une série convergente.

— D'après le **théorème des accroissements finis**, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln'(c)((n+1) - n) = \frac{1}{c}$$

d'où l'on tire que

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{c} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Source : Grands classiques de concours : séries numériques - La série harmonique - maths-france.fr

... que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$ grâce à l'**encadrement de l'intégrale** sur $[k, k+1]$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$. \square

Source : [1] p. 334

EXERCICE 7.2.1 Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx$ est égale à γ .

MÉTHODE 7.2.2 Quand un exercice amène à manipuler des parties entières, il est très souvent judicieux d'utiliser les encadrements suivants

$$x - 1 < [x] \leq x,$$

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

► **SOLUTION.**

<

Voir aussi [inégales de BERTRAND]

7.3 Séries de BERTRAND

DÉFINITION 7.3.1 – Séries de BERTRAND. Soient α et β deux réels. On nomme *série de BERTRAND* la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}.$$

THÉORÈME 7.3.1 – Condition de convergence des séries de BERTRAND. La série de BERTRAND converge si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Distinguons trois cas selon les valeurs prises par α :

▷ **Cas où $\alpha > 1$.** Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Par croissances comparées,

$$\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^\gamma} \right).$$

Or, d'après le théorème sur les séries de RIEMANN, la série de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge car $\gamma > 1$. Ainsi, en appliquant les théorèmes de comparaison, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge.

▷ **Cas où $\alpha < 1$.** Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$. Par croissances comparées,

$$n^\gamma \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc à partir d'un certain rang, $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \geq \frac{1}{t^\gamma} > 0$. Or, d'après le théorème sur les séries de RIEMANN, la série de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ diverge car $\gamma < 1$. Ainsi, en appliquant les théorèmes de comparaison, $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ diverge.

▷ **Cas où $\alpha = 1$.** Si $\beta \leq 0$, pour n assez grand, $\frac{1}{n \ln^\beta(n)} > \frac{1}{n}$ et la série de BERTRAND est divergente.

On considère maintenant le cas $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Les théorèmes généraux ne permettent pas de l'étudier. On associe à la série de BERTRAND la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$, définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Cette fonction est positive et décroissante. La série est de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln^\beta(t)} dt$, transformée par le changement de variable bijectif $u = \ln t$ en l'intégrale $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$. Cette dernière converge si et seulement si $\beta > 1$.

□

L'exercice suivant amène à étudier le comportement des séries de BERTRAND dans le cas où $\beta = 1$.

EXERCICE 7.3.1 On note $h : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n}$.

[5]

1. Étudier la continuité de h sur son domaine de définition.
2. Étudier les limites de h aux bornes de son intervalle de définition.
3. Déterminer des équivalents de h aux bornes de son intervalle de définition.

► **SOLUTION.** On note $f_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \ln t}$.

D'après le théorème de BERTRAND sur les séries numériques, l'ensemble de définition de h est $\mathcal{D}_h \stackrel{\text{def}}{=}]1, +\infty[$.

Soit $a > 1$. On se place sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [a, +\infty[$. Pour tout $x \in I$,

$$\left| \frac{1}{n^x \ln n} \right| \leq \frac{1}{n^a \ln n}$$

comme $a > 1$, d'après le théorème de BERTRAND sur les séries numériques, la série du terme majorant converge et donc par théorème de comparaison, la suite (f_x) converge normalement sur tout segment de la forme de I . On en déduit que h est continue sur \mathcal{D}_h .

⊢ En $+\infty$: comme la série des f_x converge uniformément sur $[2, +\infty[$ (on aurait pu choisir une valeur que 2), d'après le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(n) \right] = 0.$$

— En 1^+ : On montre que la fonction f_x est décroissante et donc h aussi. On note $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{1^+} h$. D'après le théorème de la

limite monotone, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposon que $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln n} \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x \ln n}$$

et en passant à la limite quand x tend vers 1^+ dans l'inégalité (ce qui est licite) on obtient

$$\ell \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n}.$$

Nous aboutissons donc à une contradiction car la somme minorante diverge quand N tend vers $+\infty$. Finalement,

$$\lim_{1^+} h = +\infty.$$

2. — En $+\infty$: on intuite que la premier terme de la somme domine les autres. On a

$$2^x \ln(2)h(x) = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \frac{\ln 2}{\ln n}.$$

On peut montrer(...) que la somme converge normalement sur $[2, +\infty[$. On en déduit que

$$h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x \ln 2}.$$

- En 1^+ : un encadrement par la méthode des rectangles permet de trouver

$$\int_3^{+\infty} f_x(t) dt + \frac{1}{2^x \ln 2} \leq h(x) \leq \int_2^{+\infty} f_x(t) dt + \frac{1}{2^x \ln 2}.$$

On en déduit que

$$h(x) \underset{1^+}{\sim} \int_2^{+\infty} f_x(t) dt$$

soit après calculs (...)

$$h(x) \underset{1^+}{\sim} -\ln(x-1).$$

◁

7.4 Deux sommes

EXERCICE 7.4.1 Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — Exprimer les termes généraux avec une intégrale.

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

◁

7.5 Somme des relations de comparaison

PROPOSITION 7.5.1 – Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs positives telles que $a_n \sim b_n$.

- Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n b_k$.
- Si $\sum a_n$ converge, alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

Il y a des résultats analogues si $a_n = o(b_n)$ ou si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.

■ **DÉMONSTRATION.** On suppose que $\sum a_n$ diverge. On sait que $a_n \sim b_n$ est équivalent à $a_n - b_n = o(b_n)$, autrement dit, pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n a_k$ et $B_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n b_k$.

Soit $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |A_n - B_n| &= \left| \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \right| \\ \text{par l'inégalité triangulaire} &\leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k| \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k - b_k|}_{\stackrel{\text{def}}{=} C} + \sum_{k=n_0}^n \underbrace{|a_k - b_k|}_{\leq \varepsilon a_k} \\ &\leq C + \varepsilon \sum_{k=n_0}^n a_k \end{aligned}$$

comme (a_n) est à valeurs positives $\leq C + \varepsilon A_n$

Comme $\sum a_n$ est divergente et à valeurs positives, $A_n \rightarrow +\infty$ et donc à partir d'un certain rang n_1 , $A_n \varepsilon \geq C$. Ainsi pour $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, $|A_n - B_n| \leq 2\varepsilon A_n$.

Donc $A_n - B_n = o(A_n)$ ce qui équivaut à $A_n \sim B_n$. ◻

Diagramme de la démonstration

$$\begin{array}{ccc} a_n \sim b_n & \xrightarrow{1} & a_n - b_n = o(a_n) \\ & & \Downarrow 2 \\ A_n \sim B_n & \xleftarrow{3} & A_n - B_n = o(A_n) \end{array}$$

7.6 Règle de RAABE-DUHAMEL

Nous rappelons la règle de D'ALEMBERT qui au programme.

THÉORÈME 7.6.1 – Règle de D'ALEMBERT. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Par contre, lorsque $\ell = 1$, nous ne pouvons pas conclure. En effet,

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Le théorème suivant donne un critère de convergence de la série lorsque $\ell = 1$ et que...

THÉORÈME 7.6.2 – RAABE-DUHAMEL. Soit α un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Voir exercice 3.43. [12]

■ **DÉMONSTRATION.** (\Rightarrow) Montrer que si $u_n = \frac{K}{n^\alpha}$ avec $K > 0$ et $\alpha > 1$ alors (u_n) vérifie la relation.

(\Leftarrow) Soit (v_n) une suite vérifiant les hypothèses. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $v_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Pour cela, étudier la série de terme général $\ln(v_n)$. □

On ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.

7.7 Suites sous-additive

Source : [5] (Exercice 2. TD I)

DÉFINITION 7.7.1 – Suite sous-additive. Une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est dite *sous-additive* si pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) , $u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

EXERCICE 7.7.1 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite sous-additive. On pose

$$b_n \stackrel{\text{def}}{=} \min_{k \in [1, n]} \frac{u_k}{k}.$$

1. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \stackrel{\text{def}}{=} n^\alpha$. Montrer que (t_n) est sous-additive si et seulement si $\alpha \leq 1$. Déterminer alors la limite de la suite (t_n/n) .
 - b) Soit (w_n) une suite réelle telle que pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $w_{n+m} = w_n + w_m$. Montrer que (w_n) est sous-additive et calculer la limite de la suite (w_n/n) .
2. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.
3. Montrer que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $u_{nm} \leq mu_n$.
4. On suppose que $\ell \neq -\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.
 - a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_m}{m} \leq \ell + \varepsilon$.
 - b) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ .

► **SOLUTION.** 1.a)

(\Leftarrow) Étudier les cas où $n = m$.

(\Rightarrow) Étudier la fonction $f : x \mapsto 1 + x^\alpha - (1 + x)^\alpha$.

1.b)

Étudier le cas où $m = 1$ et montrer que $w_n = nw_1$.

2)

Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

4.b)

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(k, r) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ tel que $n = km + r$.

Utiliser successivement la définition d'une suite sous-additive et les résultats des questions 3) et 4.a). \triangleleft

7.8 Étude de la suite de terme général

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}$$

EXERCICE 7.8.1 Soit f une supposée continue et positive sur $[a, b]$. Étudier la suite de terme général

$$u_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n}.$$

Source : [5] (Exercice 9. TD 1)

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — La démarche générale consiste à encadrer u_n .

— Majoration : f est continue sur un segment donc est en particulier bornée par un réel positif M . On peut montrer que $u_n \leq M$ (ne pas oublier l'argument de la continuité lors du passage à l'intégrale).

— Minoration : soit $\varepsilon > 0$, soit x_0 tel que $f(x_0) = M$. Comme f est continue en x_0 , il existe $[c, d] \subset [a, b]$ tel que $x_0 \in [c, d]$ et pour tout $x \in [c, d]$, $f(x) \geq M - \varepsilon$ (un dessin permet de bien comprendre la stratégie).

On peut ensuite montrer que $u_n \geq \left(\frac{d-c}{b-a} \right)^{1/n} (M - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M - \varepsilon$.

— Finalement, $u_n \rightarrow M = \max_{[a,b]} f = f$.

\triangleleft

7.9 Transformation d'ABEL

Source : Texte de [12] p. 262.

La technique des transformations d'ABEL peut être vue comme des intégrations par parties discrètes. On s'intéresse à la nature de la série $\sum a_n b_n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites réelles ou complexes.

Pour $n \geq 0$ on note $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n a_k$ la n -ième somme partielle de la série $\sum a_n$. On peut alors écrire $a_n = A_n - A_{n-1}$ (avec la convention

$A_{-1} = 0$) et ainsi, pour tout entier N on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n b_n &= \sum_{n=0}^N (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=0}^N A_n b_n - \sum_{n=0}^N A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n=0}^N A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} \\ \sum_{n=0}^N a_n b_n &= A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^N A_n (b_{n+1} - b_n). \quad (*) \end{aligned}$$

La suite (A_n) joue le rôle de la « primitive » de a_n et $b_{n+1} - b_n$ celui de la « dérivée » de b_n .

Une application classique correspond à ce qu'on appelle parfois théorème d'ABEL ou test de DIRICHLET :

THÉORÈME 7.9.1 - . Lorsque la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et la suite des sommes partielles (A_n) est bornée, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

En effet, dans (*) le terme $A_N b_{N+1}$ converge vers 0 quand N tend vers l'infini et la série $\sum A_n (b_n - b_{n+1})$ est absolument convergente car le terme général est un $\mathcal{O}(b_n - b_{n+1})$ avec la série à termes positifs $\sum (b_n - b_{n+1})$ qui est convergente.

Appliquons ce théorème aux séries trigonométriques de la forme $\sum \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et $x \not\equiv 0[2\pi]$ en prenant $a_n \stackrel{\text{def}}{=} e^{inx}$ et $b_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^\alpha}$. Les sommes partielles (A_n) sont effectivement bornées puisque

$$|A_n| = \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}.$$

Historiquement cette transformation fut utilisée par ABEL en 1826 pour donner un exemple de série de fonctions continues dont la somme n'est pas continue [†], à savoir $\sum \frac{\sin nx}{n}$.

Source : [13]

EXERCICE 7.9.1 Soient $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \varepsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

7.10 Convergence et calcul de $\sum \frac{r}{2^r}$

EXERCICE 7.10.1 Montrer la convergence de la série de terme général $\frac{r}{2^r}$ et prouver que $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2$.

[†]. CAUCHY affirme, en 1821, que la somme d'une série de fonctions continue est toujours continue ([rajouter la référence](#))

THÉORÈME 7.10.1 - . Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $\sum u_n$

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Deux méthodes de résolution sont possibles bien que la première soit plus élégante.

— La série $\sum \frac{1}{2^r}$ est une série géométrique absolument convergente. Ainsi, d'après le résultat sur les produits de CAUCHY,

$$\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{r}{2^{r-1}} = \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^r \frac{1}{2^k \cdot 2^{r-k}} = \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{2^r} \right)^2 = 4.$$

— On peut également étudier la fonction $g : x \rightarrow \sum_{r=0}^n \frac{x^r}{2^r}$.

◁

7.11 Suites du type $f(x_n) = n$

EXERCICE 7.11.1 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $xe^x = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$, en donner un équivalent puis un équivalent de $y_n = x_n - \ln(n)$.

Source : Exercice X 1 p.226 de [1]

EXERCICE 7.11.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$, en donner un équivalent.

7.12 Suites définies implicitement

MÉTHODE 7.12.1

1. Montrer l'existence de x_n
2. Démontrer la convergence de la suite x_n
3. Déterminer un équivalent
4. Déterminer un développement asymptotique de x_n

Pour cela il faut commencer par déterminer dans la relation qui définit x_n quels sont les termes prépondérants.

Source : Texte de [12] p. 181.

7.13 Sommaton par paquets

EXERCICE 7.13.1 Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série à termes réels positifs, telle que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 2} 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Source : [1] p. 340

7.14 Plan d'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

La fonction f doit être continue.

1. Trouver un intervalle I stable par f ($f(I) \subset I$). Le segment I doit contenir, au moins à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite.
2. Recherche des points fixes de la fonction f dans I .
3. ...

Source : Suites et Séries (L2) (1.4.3) – Arnaud GUYADER

7.15 Techniques classiques

7.15.1 Développements asymptotiques

Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple. On a vu que pour les séries à termes positifs, il suffit de se ramener à un équivalent. Ceci n'est plus le cas avec des séries à termes de signe quelconque. Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure.

Dans ces deux situations, il suffit souvent d'écrire un développement asymptotique du terme général, c'est-à-dire d'être plus précis dans l'approximation. Celui-ci est généralement en $\frac{1}{n}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et s'arrête au premier terme absolument convergent, en $\frac{1}{n^2}$ ou $\frac{1}{n^{3/2}}$.

Exemples :

$$\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \text{ est divergente.}$$

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin \frac{1}{n} \right) \text{ est absolument convergente.}$$

7.15.2 Groupements de termes

Considérons une série numérique $\sum u_n$ dont on veut déterminer la nature. On commence par s'assurer que le terme général (u_n) tend vers zéro, sinon la série est trivialement divergente. Ceci fait, il faudrait montrer que la suite (s_N) des sommes partielles est convergente, ce qui n'est pas toujours facile. En particulier, il est parfois plus simple de montrer qu'une sous-suite de (s_N) converge, par exemple en effectuant des regroupements de termes, et de conclure ensuite.

Cadre typique d'application : on réussit à montrer que (s_{2N}) converge, disons vers s . Alors pour la sous-suite (s_{2N+1}), il suffit d'écrire :

$$s_{2N+1} = s_{2N} + u_{2N+1},$$

et si la série ne diverge pas trivialement, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} s_{2N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} s_{2N} = s,$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = s,$$

la série converge.

7.16 Complément : Suites de CAUCHY

Issu du cours de Sophie DEDE (Stanislas Paris).

DÉFINITION 7.16.1 – Suite de CAUCHY. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de CAUCHY si et seulement

si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

PROPOSITION 7.16.1 – . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n : \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Donc, à l'aide de l'inégalité triangulaire, on obtient,

$$\forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq |u_{n+p} - \ell| + |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

car $n + p \geq N$. □

THÉORÈME 7.16.1 – . Toute suite réelle de CAUCHY converge dans \mathbb{R} .

Pour prouver ce résultat, on commence par démontrer deux lemmes.

LEMME 7.16.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de CAUCHY qui admet une sous-suite convergente dans \mathbb{R} , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de CAUCHY, donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \geq N', \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$, donc si $n \geq \max\{N, N'\}$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)+p} - \ell| \leq |u_{\varphi(n)+p} - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq 2\varepsilon.$$

Donc, en notant $N'' \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\max\{N, N'\})$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, |u_{N''+p} - \ell| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq N'', |u_n - \ell| \leq 2\varepsilon,$$

donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . □

LEMME 7.16.2 Toute suite de CAUCHY est bornée.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de CAUCHY :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon.$$

Donc,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{N+p} - u_N| \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{N}, |u_{N+p}| \leq 1 + |u_N|.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max \{ |u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1 \}.$$

□

Revenons à la démonstration du théorème.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de CAUCHY. D'après le second lemme, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Donc, d'après le premier lemme, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. □

DÉFINITION 7.16.2 – Ensemble complet. On dit alors que \mathbb{R} est complet, c'est-à-dire que toute suite de CAUCHY réelle est convergente et admet une limite dans \mathbb{R} .

REMARQUE 7.16.1

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$$

n'entraîne pas la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \ln(n+1)$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit

$$\forall \varepsilon > 0, n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon,$$

et pourtant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

REMARQUE 7.16.2 \mathbb{Q} n'est pas complet.

En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs rationnelles et converge vers $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8.1 Fonction intégrable et décroissante sur \mathbb{R}^+

EXERCICE 8.1.1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, décroissante et intégrable. Montrer que $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Source : [1] p. 268

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — Montrer que f tend vers 0 en utilisant sa décroissance et son intégrabilité. f est donc à valeurs positives.
— Encadrer $xf(x)$ en écrivant $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$.

◁

8.2 Calcul d'une intégrale impropre

EXERCICE 8.2.1 Calculer $\int_0^\pi \ln(\sin t) dt$.

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** $= -\pi \ln(2)$

◁

8.3 Intégrales de BERTRAND

THÉORÈME 8.3.1 – BERTRAND. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}.$$

Alors,

$$\int_2^{+\infty} f \text{ converge si et seulement si } \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Distinguons trois cas selon les valeurs prises par α :

- ▷ **Cas où $\alpha > 1$.** Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Par croissances comparées,

$$\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{t^\gamma} \right).$$

Or, d'après le théorème de RIEMANN, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ car $\gamma > 1$. Ainsi, en appliquant les théorèmes de comparaison, $\int_2^{+\infty} f$ converge.

▷ **Cas où $\alpha < 1$.** Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$. Par croissances comparées,

$$t^\gamma f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc à partir d'un certain rang, $f(t) \geq \frac{1}{t^\gamma} > 0$. Or, d'après le théorème de RIEMANN, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ n'est intégrable pas sur $[2, +\infty[$ car $\gamma < 1$. Ainsi, en appliquant les théorèmes de comparaison (les intégrandes sont positives), $\int_2^{+\infty} f$ diverge.

▷ **Cas où $\alpha = 1$.** Revenons aux intégrales partielles : soit $X > 2$,

$$\int_2^X \frac{1}{t \ln^\beta(t)} dt = \begin{cases} \left[\frac{\ln^{1-\beta}(t)}{1-\beta} \right]_2^X & \text{si } \beta \neq 1, \\ [\ln(\ln t)]_2^X & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln^\beta(t)}$ converge sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$.

□

8.4 Une propriété géométrique de l'intégrale

EXERCICE 8.4.1 Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ telle que f' soit strictement positive sur $[a, b]$. Calculer :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt.$$

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — Justifier que f^{-1} est licite.
 — Calculer le deuxième terme en posant $t = f(u)$.
 — Effectuer une IPP sur le deuxième terme pour conclure. Donner une interprétation géométrique.

◀

8.5 Permutation somme/intégrale

EXERCICE 8.5.1 Justifier les convergences, puis l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + x^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} dt.$$

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — $\frac{1}{2 \operatorname{ch}(t)} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}$
 — ...

◀

8.6 Lemme de LEBESGUE

EXERCICE 8.6.1

1. On suppose que f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.
Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0.$$

2. Redémontrer le même résultat en supposant simplement que la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Source : [4] Planche no 37. Intégration sur un segment

- **SOLUTION.** 1. Puisque la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{1}{\lambda} \left(-[\cos(\lambda t) f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t) dt \right) \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2. Si la fonction f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f = 1$, car pour $\lambda > 0$, $\left| \int_a^b \sin(\lambda t) dt \right| = \left| \frac{\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b)}{\lambda} \right| \leq \frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$

◁

8.6.1 Variante du lemme de LEBESGUE

PROPOSITION 8.6.1 — . Soit f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt.$$

Source : [1] p.280

- **ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION.** 1. On va montrer ce résultat dans le cas où f est constante sur $[a, b]$ (véritable difficulté du problème)
2. On va ensuite montrer ce résultat dans le cas où f est une fonction en escalier en appliquant le résultat précédent sur chacun des intervalles de la subdivision de $[a, b]$.
3. Finalement on va montrer le cas général en encadrant f par deux fonctions en escalier (méthode de l'intégrale de RIEMANN).

□

■ **DÉMONSTRATION.** 1. On pose $f = \lambda$. On va étudier la limite de l'intégrale

$$I_n = \int_a^b \lambda |\sin(nt)| dt = \frac{\lambda}{n} \int_{na}^{nb} |\sin(u)| du.$$

L'idée est alors de découper l'intervalle $[a, b]$ en trois intervalles : des **extrémités** où l'intégrale tendra vers 0 puis un intervalle **central** de longueur $k_n\pi$ qui sera simple à traiter.

A mieux rédiger...

On pose (qui existent pour $n \geq \frac{\pi}{b-a}$)

$$c_n = \min(\pi\mathbb{Z} \cap [na, nb]) \text{ et } d_n = \max(\pi\mathbb{Z} \cap [na, nb]).$$

$$c_n \sim na \text{ et } d_n \sim nb.$$

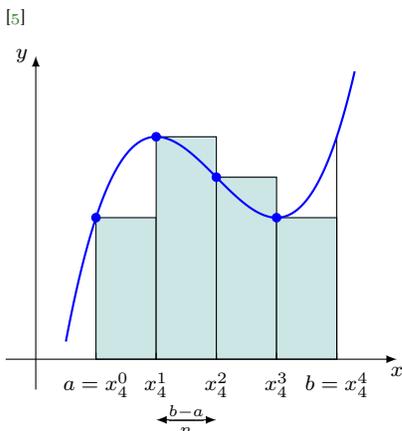
2. Aucune difficulté.

3. Il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) |\sin(nt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] |\sin(t)| dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) |\sin(t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) dt \right| + \left| \frac{2}{\pi} \int_a^b (\psi - \varphi)(t) dt \right| \end{aligned}$$

□

8.7 Sommes de RIEMANN généralisées



THÉORÈME 8.7.1 – RIEMANN. Pour tout entier naturel n non nul, la *somme de RIEMANN* associée à f sur le segment $[a, b]$ est

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt.$$

■ **DÉMONSTRATION.**

□

EXERCICE 8.7.1 Limites quand n tend vers $+\infty$ de

1.

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

2. Soit $a > 0$,

$$\left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (a+k) \right)^{1/n}$$

3.

$$\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$$

4.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$$

5.

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

6.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$$

7.

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$$

8.

$$n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$$

► SOLUTION. 1.

◁

MÉTHODE 8.7.1

—

Les sommes de RIEMANN permettent de calculer des intégrales mais leur convergence est lente comme le montre l'exercice suivant.

EXERCICE 8.7.2 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) =_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Source : [4] Planche no 37. Intégration sur un segment

8.8 Intégration des relations de comparaisons

PROPOSITION 8.8.1 — Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux, strictement positives. On suppose que $f = o_{+\infty}(g)$ et $f \sim_{+\infty} h$.

— Si g et h ne sont pas intégrables sur \mathbb{R}_+ ,

$$\int_0^x f = o_{+\infty} \left(\int_0^x g \right) \text{ et } \int_0^x f \sim_{+\infty} \int_0^x h.$$

— Si g et h sont intégrables sur \mathbb{R}_+ ,

$$\int_x^{+\infty} f = o_{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} g \right) \text{ et } \int_x^{+\infty} f \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} h.$$

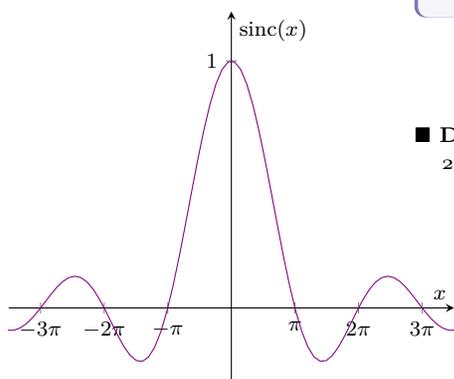
La démonstration est analogue à celle de la Sommation des relations de comparaison

8.9 Intégrale de DIRICHLET

A revoir

PROPOSITION 8.9.1 — L'intégrale de DIRICHLET (1829) est l'intégrale de la fonction sinus cardinal sur la demi-droite des réels positifs

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$



■ **DÉMONSTRATION.** 1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.
2. Deux méthodes.

— Montrer que la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

a) Montrer que $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est le terme général d'une série alternée. Donc $\sum u_n$ converge.
Attention : on ne peut pas en déduire directement que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ car on n'a pas encore démontré la convergence du deuxième membre (c.f. relation de CHASLES).

b) Il faut montrer la convergence de $\int_{\pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. **A compléter.**

— On peut aussi procéder par intégration par parties en posant

$$\left. \begin{array}{l} u(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\cos(t) \end{array} \right\} \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Bien préciser que $u(t)v(t) = -\frac{\cos(t)}{t}$ admet une limite finie en 1 et en $+\infty$.

REMARQUE 8.9.1 L'intégration par parties préserve la régularité de l'intégrale mais ne préserve pas l'intégrabilité.

3. On en déduit immédiatement que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.
4. De plus, on peut montrer que cette intégrale est semi-convergente (i.e. elle n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+). Pour cela, montrer que pour tout entier naturel n , $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$.

□

8.9.1 Intégrabilité du sinus cardinal sur \mathbb{R}_+^*

PROPOSITION 8.9.2 – La fonction sinus cardinal $\text{sinc} : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

par un changement de variable $= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\pi \frac{|\sin x|}{x + k\pi} dx$

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Source : Intégrale de DIRICHLET – Florian DUSAP

□

8.9.2 Intégrale de DIRICHLET via une intégrale à paramètre

Soit la transformée de LAPLACE de la fonction sinus cardinal :

$$F : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{\sin(t)}{t} dt$$

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R}_+ .
 - Si $x > 0$, majorer l'intégrande par $t \mapsto \exp(-xt)$.
 - Si $x = 0$, montrer le prolongement par continuité de la fonction sinus cardinal en 0 puis intégrer la fonction sinus cardinal par parties sur $[1, +\infty[$.
2. Calculer F sur \mathbb{R}_+^* , en déduire la valeur de la fonction de DIRICHLET

8.9.3 Régularité du sinus cardinal sur \mathbb{R}

EXERCICE 8.9.1 Pour x réel, on pose

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

► **SOLUTION.** Pour x réel non nul, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. La fonction f est donc développable en série entière sur \mathbb{R} et en particulier, la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . ◀

fic00126

8.10 Intégrale de GAUSS

PROPOSITION 8.10.1 – .

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

EXERCICE 8.10.1

1. **Première méthode** : « à la main ».Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}.$$

Pour tout réel positif x , on pose $f(x) = e^{-x^2}$.a) Montrer que pour tout réel positif x ,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{ne}.$$

b) À l'aide de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS.2. **Deuxième méthode** : « avec le théorème de convergence dominée ».Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}.$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

b) À l'aide de la convergence dominée, calculer l'intégrale de GAUSS.

► SOLUTION.

◀

8.11 Intégrale de WALLIS

DÉFINITION 8.11.1 – Intégrale de WALLIS.

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$$

PROPOSITION 8.11.1 – .

$$W_{2p} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$W_{n+1} \sim W_n \quad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

■ **DÉMONSTRATION.** Calculons W_{n+2} en effectuant une intégration par parties. On pose $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} -\cos(t)$ et $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(t)^{n+1}$, toutes deux de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \underbrace{\left[-\cos(t) \sin(t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin(t)^2) \sin(t)^n dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \end{aligned}$$

soit $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la relation précédente,

□

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \underbrace{W_0}_{=\pi/2} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^p (2k+1)}{\prod_{k=1}^{p+1} (2k)} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\left[\prod_{k=1}^p (2k+1)\right] \times \left[\prod_{k=1}^{p+1} (2k)\right]}{\left[\prod_{k=1}^{p+1} (2k)\right]^2} \frac{\pi}{2} \\ W_{2p} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{W_1}_{=1} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=0}^p (2k+1)} \\ &= \frac{\left[\prod_{k=1}^p (2k)\right]^2}{\left[\prod_{k=0}^p (2k+1)\right] \left[\prod_{k=1}^p (2k)\right]} \\ W_{2p+1} &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

8.11.1 Séries génératrices

Ajouter un texte d'introduction

PROPOSITION 8.11.2 – . La série génératrice des termes pairs est

$$\sum_{p=0}^{\infty} W_{2p} x^{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La série génératrice des termes impairs est

$$\sum_{p=0}^{\infty} W_{2p+1} x^{2p+1} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Source : Intégrale de WALLIS – wikipedia.org

EXERCICE 8.11.1 Soit $x \in]0, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n$ puis $\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n$.

Source : Exercices de Jean-Louis ROUGET (ficc00126) – <http://exo7.emath.fr>

► **SOLUTION.** D’après Section 8.11 on page 116, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et la règle de D’ALEMBERT fournit $R = 1$. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout entier naturel n , $|x^n \cos^n t| \leq |x|^n$. Comme la série numérique de terme général $|x|^n$ converge, la série de fonctions de terme général $t \mapsto x^n \cos^n t$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. D’après le théorème d’intégration terme à terme sur un segment,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[x^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt \right] = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^n t \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 - x \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du \quad \text{en posant } u = \tan \frac{t}{2} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)u^2 + (1-x)} du \\ &= 2 \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \left[\arctan \left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right) \right]_0^1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

◀

8.11.2 Calcul de l’intégrale de GAUSS

Source : Intégrale de WALLIS – wikipedia.org

On peut aisément utiliser les intégrales de WALLIS pour calculer l’intégrale de Gauss.

On utilise pour cela l’encadrement suivant, issu de la construction de la fonction exponentielle par la méthode d’EULER : pour tout entier $n > 0$ et tout réel $u \in]-n, n[$,

$$\left(1 + \frac{u}{n} \right)^n \leq e^u \leq \left(1 - \frac{u}{n} \right)^{-n}.$$

Posant alors $u = -x^2$, on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} dx.$$

Or les intégrales d’encadrement sont liées aux intégrales de WALLIS. Pour celle de gauche, il suffit de poser $x = \sqrt{n} \sin t$ (t variant de 0 à $\pi/2$). Quant à celle de droite, on peut poser $x = \sqrt{n} \tan t$ (t variant de

0 à $\pi/4$) puis majorer par l'intégrale de 0 à $\pi/2$. On obtient ainsi :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

Par le théorème des gendarmes, on déduit alors de l'équivalent de W_n que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

8.11.3 Volume d'une boule en dimension n

EXERCICE 8.11.2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ on désigne par $V_n(R)$ le volume de la boule de \mathbb{R}^n de centre O et de rayon R ,

Source : [2]

$$V_n(R) \stackrel{\text{def}}{=} \int \cdots \int_{x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \cdots dx_n.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!}.$$

8.11.4 GRAIN DE RAISIN : Produit de WALLIS

PROPOSITION 8.11.3 – Produit de WALLIS.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2}$$

■ **DÉMONSTRATION.** Puisque $W_{2n} \sim W_{2n+1}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}/\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Or d'après le calcul des intégrales de WALLIS :

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}/\frac{\pi}{2}} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}.$$

□

8.12 Intégrales eulériennes

De premières tentatives pour définir la factorielle de valeurs non entières remontent à STIRLING et Daniel BERNOULLI. Dans une lettre à Christian GOLDBACH du 13 octobre 1729, EULER découvre (ou invente ?) une fonction de variable réelle prolongeant de manière naturelle la fonction $n!$. D'abord introduite comme limite de produits, cette fonction fut plus tard présentée sous forme intégrale et reliée à des fonctions voisines. Les fonctions eulériennes sont les plus importantes « fonctions spéciales » de l'analyse classique, réelle et complexe. LEGENDRE les a nommées, classifiées et étudiées. Elles ont aussi été étudiées par GAUSS, BINET,

Source : Fonction eulériennes – Pierre-Jean HORMIÈRE

PLANA, MALMSTEN, RAABE, WEIERSTRASS, HANKEL, H. BOHR, MOLLERUP, ARTIN ...

Il y a bien des façons de prolonger la fonction $n!$ au domaine réel, même en se limitant aux fonctions continues. Une idée naturelle est de partir

de la formule $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. Cette forme intégrale de la factorielle suggère de considérer la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. Cette

fonction, définie sur $] - 1, +\infty[$, prolonge intelligemment la factorielle, en ce sens qu'elle possède des propriétés nombreuses et cohérentes. Par commodité, on considère plutôt $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

8.12.1 Fonction Gamma d'EULER

DÉFINITION 8.12.1 – Fonction Gamma d'EULER. La fonction Gamma d'EULER est définie par :

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

REMARQUE 8.12.1 À un changement de variable près, la fonction Γ est la Transformée de LAPLACE de la fonction $t \mapsto t^x$.

PROPOSITION 8.12.1 –

- La fonction Γ est définie si et seulement si $x > 0$.
- Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

■ **DÉMONSTRATION.** — La fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions qui y sont continues. La fonction f_x est donc intégrable sur tout segment de $]0, +\infty[$. Il reste à étudier son intégrabilité en 0 et en $+\infty$:

- ▷ En $+\infty$: par croissances comparées, $f_x(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. D'après le théorème de comparaison des fonctions à termes positifs, f_x est intégrable au voisinage de $+\infty$.
- ▷ En 0 : $f_x(t) \sim_0 t^{x-1}$ qui est intégrable d'après RIEMANN si et seulement si $1-x < 1$ i.e. si et seulement si $x > 0$.

— Soit $x > 0$. Calculons $\Gamma(x+1)$ en effectuant une intégration par parties. Posons $u : t \mapsto e^{-t}$ et $v : t \mapsto t^x$, toutes deux de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ . Vérifions la convergence du crochet :

$$\text{par croissances comparées} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0,$$

$$\text{comme } x > 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t) = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties généralisées,

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \underbrace{0}_{\text{crochet}} - \int_0^{+\infty} x t^{x-1} (-e^{-t}) dt.$$

soit

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En particulier, $\Gamma(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!$$

□

Cette fonction, introduite en 1729 par le mathématicien suisse, prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des réels strictement positifs.

EXERCICE 8.12.1 Caculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 8.12.2 Montrer que la fonction Γ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

PROPOSITION 8.12.2 – Dérivées successives de la fonction Gamma.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

■ **ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION.** Utiliser une domination locale sur un segment $[a, A] \subset \mathbb{R}_+^*$ par la fonction :

$$\varphi_k : t \mapsto \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1], \\ |\ln t|^k e^{-t} t^{A-1} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

□

EXERCICE 8.12.3 Montrer que $\Gamma(x) \sim_{0+} \frac{1}{x}$.
Montrer que Γ est convexe et étudier ses variations.

Source : [2]

8.12.2 Formule de STIRLING

Ajouter un texte d'introduction

THÉORÈME 8.12.2 – STIRLING.

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

■ **ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION.** 1. Montrer que $\left(\frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
2. Montrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$ en utilisant l'Intégrale de WALLIS :

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

- Montrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- Exprimer W_{n+2} en fonction de W_n grâce à une IPP :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

THÉORÈME 8.12.1 – Théorème (Intégration par parties généralisées).

Source : [5]

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I . Si la fonction fg a une limite finie en a et en b , alors les intégrales

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt \text{ et } \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

sont de même nature. Si ces quantités sont convergentes, en notant

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} (f(x)g(x)) - \lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)g(x)),$$

on obtient la relation

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt$$

$$\text{Source} = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

c) Exprimer W_{2p} et W_{2p+1} en fonction de p :

$$W_{2p} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

d) Utiliser les points (a) et (b) pour montrer que $\frac{W_n}{W_{n+1}} \rightarrow 1$

e) Utiliser les points (c) et (d) pour montrer que $\left(\frac{2^n n!}{n((2n)!)^2}\right)^4 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

f) Utiliser le point 1. pour déterminer ℓ

□

8.12.3 L'intégrale de GAUSS comme valeur particulière de la fonction Gamma

Source : Intégrale de Gauss – wikipedia.org

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

8.12.4 Fonction bêta

DÉFINITION 8.12.2 – Fonction bêta. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$I_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

PROPOSITION 8.12.3 – Expression factorielle de la fonction bêta. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Sources :

- Intégrale d'EULER – wikipedia.org
- [3] Chapitre IV, 3 Intégrales eulériennes, page 125.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Nous allons déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ en faisant une intégration par parties. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{p+1} t^{p+1}$ et $v : t \mapsto (1-t)^q$, toutes deux de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Alors,

$$I_{p,q} = \left[\frac{1}{p+1} t^{p+1} \times (1-t)^q \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^{q-1} dt$$

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$$

On en déduit que

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \cdots \times \frac{1}{p+q} I_{p+q,0}$$

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

□

EXERCICE 8.12.4 Déterminer la nature de la série $\sum I_{n,n}$ et, le cas échéant, calculer sa somme.

Source : [5]

EXERCICE 8.12.5 Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Source : Clémentine PORTAL (PCSI1, Collège Stanislas) feuille d'exo n°7, exo 11

► SOLUTION.

◁

8.13 Théorème de FUBINI

THÉORÈME 8.13.1 – FUBINI. Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue. Alors,

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ce théorème a été démontré par le mathématicien italien GUIDO FUBINI en 1907.

Nous allons voir la démonstration de ce résultat sous forme d'exercice.

EXERCICE 8.13.1 Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [c, d]$ on pose

$$\varphi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(u, t) du.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[c, d]$.
2. On pose alors, pour tout $x \in [a, b]$

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_c^d \varphi(x, t) dt.$$

Montrer que ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, préciser ψ' .

3. En déduire que pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, t) du \right) dt.$$

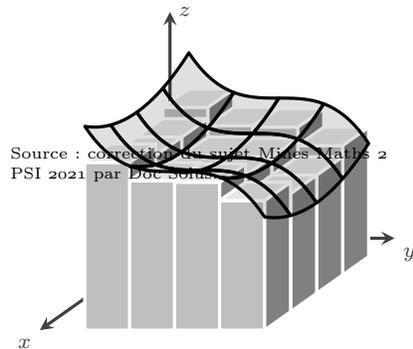
► SOLUTION. 1. Application du théorème de continuité des intégrales à paramètre.

Pour la domination : f est continue sur une partie fermée bornée de \mathbb{R}^2 , donc d'après le théorème des bornes, f est bornée sur $[a, b] \times [c, d]$ par une constante $M \in \mathbb{R}_+$.

2. Application du théorème de dérivation des intégrales à paramètre à la fonction $x \mapsto \int_c^d \varphi(x, t) dt$:

- $\forall t \in [c, d]$, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ car c'est la primitive s'annulant en a de la fonction continue $x \mapsto f(x, t)$.
- $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t)$
- La domination se fait par la même constante M que précédemment.

$$\forall x \in [a, b] \quad \psi'(x) = \int_c^d f(x, t) dt.$$



Source : correction du sujet Mines Maths 2 PSI 2021 par Doc Sorus

Cette figure ne correspond pas au théorème de FUBINI

3. Soit $x \in [a, b]$. D'une part,

$$\psi(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, t) du \right) dt.$$

D'autre part, d'après la question précédente et le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^x \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_a^x \psi'(u) du = \psi(x) - \psi(a)$$

$$\text{Or } \psi(a) = \int_c^d \varphi(a, t) dt$$

$$\text{et } \forall t \in [c, d] \quad \varphi(a, t) = \int_a^a f(u, t) du = 0$$

d'où $\psi(a) = 0$ et le résultat.

En particulier, pour $x = b$ on obtient le résultat final.

◁

8.14 Transformée de LAPLACE

La transformation de LAPLACE généralise la transformation de FOURIER qui est également utilisée pour résoudre les équations différentielles : contrairement à cette dernière, elle tient compte des conditions initiales et peut ainsi être utilisée en théorie des vibrations mécaniques ou en électricité dans l'étude des régimes forcés sans négliger le régime transitoire. De manière générale, ses propriétés vis-à-vis de la dérivation permettent un traitement plus simple de certaines équations différentielles, et elle est de ce fait très utilisée en automatique.

Dans ce type d'analyse, la transformation de LAPLACE est souvent interprétée comme un passage du domaine temps, dans lequel les entrées et sorties sont des fonctions du temps, dans le domaine des fréquences, dans lequel les mêmes entrées et sorties sont des fonctions de la « fréquence » (complexe) p . Ainsi ; il est possible d'analyser simplement l'effet du système sur l'entrée pour donner la sortie en matière d'opérations algébriques simples (cf. théorie des fonctions de transfert en électronique ou en mécanique).

DÉFINITION 8.14.1 – Transformée de LAPLACE. Pour tout fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on note, lorsqu'elle converge,

$$\mathcal{L}(f)(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

La fonction $\mathcal{L}(f)$ est la *transformée de LAPLACE* de f .

Sources : [1] + [5] (Exercice cerise Ch. 12)

Démonstration du théorème de la valeur finale :

- Généralisation classique du théorème des bornes $\rightsquigarrow f$ est bornée
- Changement de variable : $\varphi : u \mapsto \frac{u}{p}$
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Théorème de convergence dominée

8.15 Version intégrale du lemme de CESÀRO

LEMME 8.15.1 Soit f une fonction continue telle que $\lim_{+\infty} f = \ell$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell.$$

■ **DÉMONSTRATION.** La démonstration est directement adaptée de celle de la version discrète. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f converge vers ℓ en $+\infty$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq x_0$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Soit $x > x_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \\ \text{par l'inégalité triangulaire} &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \ell| dt \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\underbrace{\int_0^{x_0} |f(t) - \ell| dt}_{\stackrel{\text{def}}{=} K} + \underbrace{\int_{x_0}^x |f(t) - \ell| dt}_{\leq \varepsilon} \right) \\ &\leq \frac{K}{x} + \varepsilon \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{x} = 0$ donc il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq x_1$, $\left| \frac{K}{x} \right| \leq \varepsilon$.

Ainsi pour tout $x \geq \max\{x_0, x_1\}$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit le résultat. □

9.1 Orthoptique d'une parabole

EXERCICE 9.1.1 Soit \mathcal{P} la parabole de foyer $F = (1, 1)$ et de directrice

$$\mathcal{D} : x - y + 1 = 0.$$

1. Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} dans le repère canonique de \mathbb{R}^2 .
2. En utilisant une équation réduite de \mathcal{P} , reconnaître la courbe \mathcal{O} – la courbe orthoptique – des points d'où l'on peut mener deux tangentes à \mathcal{P} qui soient perpendiculaires entre elles.

Source : [1] p. 203

- Géométrie élémentaire dans l'espace
- Réduction, tracé de coniques/quadratiques
- Courbe orthoptique de l'ellipse (cercle de MONGE)
- Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas

9.2 Plan d'étude des courbes

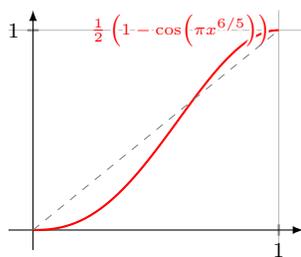
Soit

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

- Domaine de définition de f .
- Domaine d'étude : recherche des symétries
- Étude des variations de x et de y
- Étude des points critiques
- Étude des branches infinies
- Recherche des points doubles (s'il y en a)
- Tracé

À partir du XVII^e siècle, le développement du calcul infinitésimal, motivé par de nombreux problèmes de cinématique, de mécanique, ou de calcul des variations, fait de la « fonction » l'objet central des mathématiques modernes, alors que jusque là, le « nombre » était la base de l'édifice mathématique. Nous devons à BERNOULLI et LEIBNIZ le terme même de « fonction » : pour BERNOULLI (1698), une fonction de la variable x est « une quantité formée d'une manière quelconque à partir de x et de constantes ». L'écriture $y = f(x)$ est introduite par EULER en 1734. Les fonctions sont représentées par des courbes dans le plan et EULER se demande si une courbe donnée correspond toujours à une fonction. C'est lui qui distingue les courbes continues, des courbes discontinues, qui sont le plus souvent, à cette époque, des graphes de fonctions continues par morceaux. Cette double conception des fonctions, comme expressions analytiques ou comme graphes du plan, ne sera pas vraiment éclaircie avant le XIX^e siècle (c'est DIRICHLET qui donnera la définition moderne d'une fonction comme correspondance ; il proposera ainsi (en 1837) un exemple de fonction discontinue partout, la fonction χ définie par $\chi(x) = 1$ pour x rationnel et $\chi(x) = 0$ pour x irrationnel). LAGRANGE, cherchant à établir les fondements de l'Analyse, s'en tient au point de vue formel et refuse de se référer à toute notion de limite. Ces hésitations empêchent les mathématiciens du XVII^e siècle de mener jusqu'à leur achèvement certains de leurs travaux, comme l'étude de l'équation des cordes vibrantes. C'est la génération suivante, avec entre autres GAUSS, CAUCHY, BOLZANO et ABEL, qui donnera dans la première moitié du XIX^e siècle un statut rigoureux aux notions de convergence, de continuité, ... Quant au concept de limite d'une fonction numérique, on doit sans doute sa première définition précise à WEIERSTRASS.

Source : [12]



Exemple d'une fonction vérifiant les hypothèses de l'énoncé

10.1 Point fixe d'une fonction de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$

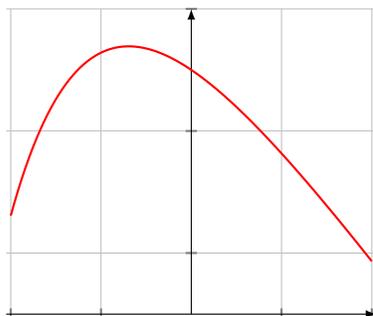
EXERCICE 10.1.1 Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que :

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = c$.

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — Poser $g(x) = f(x) - x$.
 — L'objectif est de montrer que g s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$ en montrant l'existence de x_0 et x_1 dans $[0, 1]$ tels que $g(x_0) < 0$ et $g(x_1) > 0$ pour pouvoir appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires**.
 — Raisonner par l'absurde sur l'existence de x_0 et de x_1 et écrire la dérivée de f comme la limite de son taux d'accroissement pour aboutir à des contradictions.

<



10.2 Convexité et signe

EXERCICE 10.2.1 Que peut-on dire sur une fonction concave et positive sur \mathbb{R} ?

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Faire un dessin...

<

10.3 ROLLE à l'infini

THÉORÈME 10.3.1 — . Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 et telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $d \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(c) = f''(d) = 0$.

10.4 Théorème de DARBOUX

THÉORÈME 10.4.1 - DARBOUX. Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $c = f'(k)$.

Fonction de DARBOUX :

Fonction dérivable en tout point, mais dont la dérivée est discontinue en 0 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10.5 Uniforme continuité et intégrale convergente

EXERCICE 10.5.1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

► **SOLUTION.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} f(t) dt + \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} (f(x) - f(t)) dt + \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} f(t) dt \\ |f(x)| &\leq \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} \underbrace{|f(x) - f(t)|}_{\leq \varepsilon} dt + \left| \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} f(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \frac{1}{2\eta_\varepsilon} \int_{x-\eta_\varepsilon}^{x+\eta_\varepsilon} f(t) dt \right| \\ &\rightarrow 0 \text{ d'après le critère de CAUCHY...} \end{aligned}$$

◁

DÉFINITION 10.5.1 – Continuité uniforme. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La fonction f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ (|x - y| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

10.6 Lemme de CROFT

LEMME 10.6.1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $a > 0$, la suite $(f(na))_{n \geq 0}$ tend vers 0. Montrer que si la fonction f est uniformément continue, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Sources : [1] p. 259 & [12] p. 322

Sources : correction principalement de [12] avec des précisions venant de [1].

■ **DÉMONSTRATION.** L'hypothèse signifie que f tend vers 0 selon toute suite arithmétique de la forme $(na)_{n \geq 0}$. Lorsque la fonction est uniformément continue, on peut contrôler son comportement entre deux termes consécutifs de la suite. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. La continuité uniforme de f permet de choisir $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$|x - y| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Puisque $\eta_\varepsilon > 0$, la suite $(f(n\eta_\varepsilon))_{n \geq 0}$ tend vers 0 par hypothèse. Fixons N tel que $|f(n\eta_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Soient $x \geq N\eta_\varepsilon$ et $n \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \in \mathbb{N} \mid x \leq k\eta_\varepsilon\}$ qui est bien défini. Alors $|x - n\eta_\varepsilon| \leq \eta_\varepsilon$. On a alors $|f(x) - f(n\eta_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ de sorte que par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f(n\eta_\varepsilon)| + |f(n\eta_\varepsilon)| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $x \geq N\eta_\varepsilon$, on a bien prouvé que f tend vers 0 en $+\infty$. ◻

Source : [1] (p.261)

EXERCICE 10.6.1 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f \circ f = f$.

— Equation fonctionnelle

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

11

Le Calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait se résumer en trois mots :

MAJORER, MINORER, APPROCHER.

De même qu'on cherche à approcher un nombre inconnu (défini par un procédé quelconque) à l'aide de nombres décimaux (ou rationnels), de même il est naturel en Analyse de chercher à « approcher » une fonction complexe inconnue (qui peut être définie par des procédés variés, somme de série, intégrale dépendant d'un paramètre, solution d'équation différentielle, etc.) à l'aide de fonctions que l'on considère comme connues (polynômes, fonctions exponentielles, fonctions trigonométriques, etc.). Mais il faut préciser ce qu'on entend par « approcher », c'est-à-dire « mesurer » en quelque sorte l'« écart » de deux fonctions, de même que la valeur absolue $|x - y|$ mesure l'écart de deux nombres réels ou complexes.

L'idée la plus naturelle est que si une fonction g « approche » une fonction f dans un ensemble E où elles sont toutes deux définies, alors, pour chaque $x_0 \in E$, la valeur $g(x_0)$ de g doit approcher la valeur $f(x_0)$ de f au sens usuel, c'est-à-dire que $|f(x_0) - g(x_0)|$ doit être « petit ». Comme ceci doit avoir lieu en chaque point x_0 de E , on est conduit à prendre pour « écart » de deux fonctions complexes f, g définies dans E le nombre

$$d(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|.$$

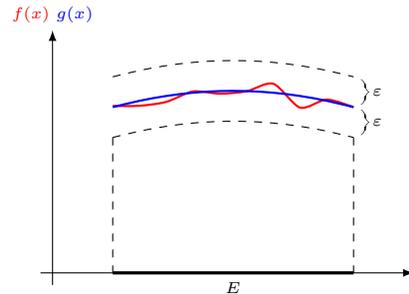
Lorsqu'il s'agit de fonctions réelles f, g définies dans un intervalle $E = [a, b]$ de \mathbb{R} , l'idée d'« écart » que nous venons de définir peut se concrétiser graphiquement de la façon suivante : dire que $d(f, g) \leq \varepsilon$ signifie que pour tout $x \in E$ on a $g(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) + \varepsilon$, c'est-à-dire que le graphe de f est tout entier contenu dans la « bande » de demi-largeur ε autour du graphe de g .

Pour distinguer cette idée d'« approximations » d'autres notions, nous dirons qu'il s'agit d'approximation uniforme d'une fonction par une autre dans un ensemble E où elles sont toutes deux définies ; il est important de remarquer que cette notion dépend essentiellement de l'ensemble E que l'on considère : si f et g sont toutes deux définies dans un ensemble plus grand E' , la relation $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in E$ n'entraîne nullement $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in E'$.

Étant donnés deux ensembles de fonctions \mathcal{F} (les fonctions « inconnues ») et \mathcal{G} (les fonctions « connues ») toutes définies dans un même ensemble E , nous dirons pour abrégé qu'on peut approcher uniformément dans E les fonctions de \mathcal{F} par les fonctions de \mathcal{G} si, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{G}$ (dépendant de f et de ε) telle que l'écart $d(f, g) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Source : V.1 Écart de deux fonctions de [3]



11.1 Théorème d'approximation de WEIERSTRASS

THÉORÈME 11.1.1 – WEIERSTRASS. Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

Source : Théorème de Weierstrass (approximation par des polynômes) – Bibm@th.net

Autrement dit, pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Ce théorème affirme que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans l'ensemble des fonctions réelles continues sur un segment (pour la topologie de la convergence uniforme).

Source : [3] page 157

■ DÉMONSTRATION.

□

Source : Théorème de Stone-Weierstrass – Théorème d'Ascoli (fic00042) – exo7.emath.fr

EXERCICE 11.1.1 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t)t^n dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

► SOLUTION.

◀

L'exercice suivant explicite une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0, 1]$.

Source : [5] (Exercice 5. TD Ch. VIII)

EXERCICE 11.1.2 Soit la suite de fonctions définie pour tout $x \in [0, 1]$ par

$$\begin{cases} P_0(x) &= 0, \\ P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2. \end{cases}$$

Montrer que (P_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$.

Questions intermédiaires :

1. Montrer que (P_n) est une suite de restrictions de polynômes dont on précisera le degré.
2. Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction f à préciser.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq f(x) - P_n(x) \leq 2 \frac{f(x)}{2 + nf(x)}.$$

4. Montrer que (P_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[0, 1]$.

► **SOLUTION.** Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2) \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x - P_n(x)^2}{\sqrt{x} - P_n(x)} \right) \\ \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x \in [0, 1], 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n \gg.$$

▷ Initialisation pour $n = 0$: immédiat.

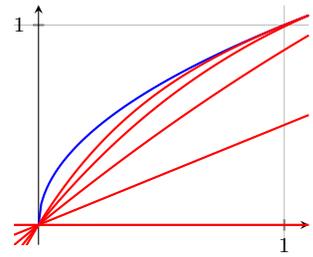
▷ Hérité : soit $n \geq 0$, on suppose \mathcal{P}_n vraie.

Soit $x \in [0, 1]$, d'après le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n \times \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \right)$$

Comme le polynôme P_n est positif, le second terme est majoré par $1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$ et donc \mathcal{P}_{n+1} est vérifiée.

◁



Convergence uniforme de la suite (P_n) vers la fonction racine carrée sur $[0, 1]$

Une question naturelle est de se demander si ce théorème d'approximation peut se généraliser à \mathbb{R} . La réponse est non.

PROPOSITION 11.1.1 - Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f , alors f est un polynôme.

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f .

D'après la critère de CAUCHY uniforme, il existe un rang n tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+p} - P_n \leq 1.$$

La fonction polynomiale $P_{n+p} - P_n$ est donc bornée sur \mathbb{R} autrement dit elle est constante. On a alors pour tout $(p, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$,

$$P_{n+p}(x) = P_n(x) + P_{n+p}(0) - P_n(0) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} P_n(x) + f(0) - P_n(0)$$

donc par unicité de la limite simple, $f : x \mapsto P_n(x) + f(0) - P_n(0)$, qui définit bien une fonction polynomiale. □

Sources : [1] & [4]

11.2 Approximation polynomiale de BERNSTEIN

BERNSTEIN a donné une démonstration constructive et probabiliste du théorème de WEIERSTRASS sur $[0, 1]$, en prouvant qu'on pouvait prendre :

DÉFINITION 11.2.1 – Polynôme de BERNSTEIN. Le polynôme de BERNSTEIN d'ordre n associé à la fonction f est le polynôme

$$B_n(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \quad (11.1)$$

Source : [5] (Exercice 10. TD VIII)

THÉORÈME 11.2.1 – Soit f une fonction continue sur $I \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]$. La suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers la fonction f sur I .

Nous allons voir deux démonstrations de ce théorème.

■ **DÉMONSTRATION.** La démonstration qui suit est celle proposée dans [3] page 159 dont quelques étapes techniques ont été détaillées. Nous partirons de l'identité

$$1 = (1-t+t)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (1-t)^{n-p} t^p. \quad (11.2)$$

On déduit de cette relation que pour toute fonction bornée f définie dans I , on a

$$|B_n(f)(t)| \leq \sup_{t \in I} |f(t)| \cdot \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (1-t)^{n-p} t^p \right) = d(0, f) \quad (11.3)$$

puisque les fonctions $\binom{n}{p} (1-t)^{n-p} t^p$ prennent des valeurs ≥ 0 dans I .

Étant donné $\varepsilon > 0$, on sait que pour toute fonction continue f dans I , il existe, en vertu du théorème de WEIERSTRASS, un polynôme P tel que $d(f, P) \leq \varepsilon$; on conclut alors de (11.3) que

$$d(B_n(f), B_n(P)) \leq d(f, P) \leq \varepsilon. \quad (11.4)$$

Par suite, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} |f(t) - B_n(f)(t)| &\leq |f(t) - B_n(P)(t)| + \underbrace{|B_n(P)(t) - B_n(f)(t)|}_{\leq \varepsilon \text{ d'après (11.4)}} \\ &\leq \underbrace{|f(t) - P(t)|}_{\leq \varepsilon} + |P(t) - B_n(P)(t)| + \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la borne supérieure sur I , on obtient

$$d(f, B_n(f)) \leq 2\varepsilon + d(P, B_n(P)). \quad (11.5)$$

Si l'on prouve le théorème lorsque f est un polynôme, il sera donc vrai pour toute fonction continue dans I . Par linéarité, il suffit donc de le prouver lorsque $f(t) = t^m$. En fait, nous allons voir, par récurrence sur m , que l'on a, en posant $f_m(t) = t^m$, pour $n \geq m$,

$$B_n(f_m)(t) = t^m + \frac{1}{n} Q_{m,n}(t) \quad (11.6)$$

où $Q_{m,n}$ est un polynôme de degré inférieur à $m-1$, dont les coefficients sont majorés en valeur absolue par un nombre A_m indépendant de n . La formule (11.6) se réduit à (11.3) pour $m = 0$, avec $Q_{0,n}(t) = 0$.

Supposons-la vérifiée pour un entier m et dérivons par rapport à t ; en vertu de la définition (11.1), on obtient, pour $n \geq m + 1$,

$$-\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} \frac{p^m}{n^m} (n-p)(1-t)^{n-p-1} t^p + \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{p^{m+1}}{n^m} (1-t)^{n-p} t^{p-1} = m t^{m-1} + \frac{1}{n} Q'_{m,n}(t). \tag{11.7}$$

Comme $(n-p) \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p}$, le premier terme du premier membre de (11.7) est égal à

$$-n B_{n-1}(f_m)(t) = -n t^m - \frac{n}{n-1} Q_{m,n-1}(t).$$

Multipliant les deux membres de (11.7) par $\frac{t}{m}$, on obtient donc, en vertu de la définition des polynômes de BERNSTEIN,

$$-\frac{n}{m} t^{m+1} - \frac{nt}{m(n-1)} Q_{m,n-1}(t) + \underbrace{\frac{n}{m} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{p^{m+1}}{n^{m+1}} (1-t)^{n-p} t^p}_{B_n(f_{m+1})(t)} = t^m + \frac{t}{mn} Q'_{m,n}(t)$$

soit en réarrangeant les termes et en multipliant l'égalité par $\frac{m}{n}$;

$$\begin{aligned} B_n(f_{m+1})(t) &= t^{m+1} + \frac{m}{n} t^m + \frac{t}{n^2} Q'_{m,n}(t) + \frac{t}{n-1} Q_{m,n-1}(t) \\ &= t^{m+1} + \frac{1}{n} Q_{m+1,n}(t) \end{aligned}$$

avec $Q_{m+1,n}(t) = m t^m + \frac{1}{n} t Q'_{m,n}(t) + \frac{n-1}{n} t Q_{m,n-1}(t)$.

Comme, par hypothèse, $Q_{m,n}$ est de degré inférieur à $m-1$, le polynôme $Q_{m+1,n}$ est bien de degré inférieur à m .

Les coefficients de $\frac{1}{n} t Q'_{m,n}(t)$ sont majorés en valeur absolue par $\frac{m-1}{n} A_m \leq (m-1) A_m \dots$ **A FINIR** et cela prouve (11.6) par récurrence, avec

$$A_{m+1} \leq 3 \sup(m, (m-1) A_m).$$

□

Le sujet X/ENS PSI 2018 propose une démonstration élégante de ce résultat d'analyse pure en passant par les probabilités. (Je crois que la version du TD est un peu différente). Préciser les hypothèses sur f .

EXERCICE 11.2.1 Soit $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de BERNOULLI de paramètre x . On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Exprimer $\mathbf{E}(S_n)$, $\mathbf{V}(S_n)$ et $\mathbf{E}(f(S_n))$ en fonction de x , n et du polynôme $B_n(f)$.
2. En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathbf{V}(S_n)^{1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire

l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

pour tout $x \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$f - B_n(f) \leq \frac{3k}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Conclure.

PROPOSITION 11.2.1 – ♦ **Somme de BERNOULLI indépendantes.** La somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes suivant la même loi de BERNOULLI de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

La démonstration est immédiate en passant par les fonctions génératrices.

THÉORÈME 11.2.2 – ♦ **Théorème de HEINE.** Une fonction continue sur un segment, plus généralement sur un compact, y est uniformément continue.

On retrouve cette méthode de séparation avec la fonction indicatrice dans la démonstration de l'inégalité de MARKOV.

THÉORÈME 11.2.3 – ♦ **Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.** Soit X une v.a.r.d. admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

■ **DÉMONSTRATION.** Soit $x \in [0, 1]$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ indépendantes identiquement distribuées de loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(x)$. Ainsi, $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$ ♦ et par le théorème de transfert

$$\mathbf{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} f\left(\frac{p}{n}\right) (1-x)^{n-p} x^p = B_n(f)(x).$$

On va chercher à utiliser la convergence en probabilité de $\frac{S_n}{n}$ vers x . Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le compact $]\frac{n}{n}, 1]$ donc d'après le théorème de HEINE ♦, elle y est uniformément continue i.e.

$$\exists \eta > 0, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On va alors scinder en deux. On a

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left| \mathbf{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \right| \leq \mathbf{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]$$

$$\leq \mathbf{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| < \eta} + \left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \eta}\right]$$

$$\text{par linéarité de l'espérance} \leq \mathbf{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| < \eta}\right] + \mathbf{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \mathbf{1}_{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \eta}\right]$$

$$\leq \varepsilon + 2f \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \eta}\right]$$

$$\text{par l'espérance d'une indicatrice} \leq \varepsilon + 2f \mathbf{P}\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right| \geq \eta\right).$$

On utilise alors l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV ♦ (on rappelle que $\mathbf{E}[S_n/n] = x$)

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \varepsilon + 2f \frac{\mathbf{V}(S_n/n)}{\eta^2} \\ &\leq \varepsilon + 2f \frac{\mathbf{V}(S_n)}{n^2 \eta^2} \\ &\leq \varepsilon + 2f \frac{x(1-x)}{n \eta^2} \\ &\leq \varepsilon + f \frac{1}{2n \eta^2} \text{ indépendant de } x. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\limsup_n f - B_n(f) \leq \varepsilon$, et on a en faisant tendre ε vers 0 :

$$f - B_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

REMARQUE 11.2.1 Ce résultat peut être étendu à toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ en posant

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = g((b-a)x + a).$$

La fonction $x \mapsto (b-a)x + a$ est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[a, b]$.

11.3 Intégration d'une série de fonctions

Soit $S : x \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

— Donner l'ensemble de définition de S et donner un équivalent en $+\infty$.

► $D_S = \mathbb{R}^*$.

► On se doute que S se comporte comme $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. L'idée est donc de déterminer la limite de $x^2S(x)$ en $+\infty$. Le **théorème d'interversion des limites** permet d'affirmer que cette limite est finie et qu'elle est égale à $c = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Une séparation des

termes pairs et impairs de la somme (et le résultat du **problème de Bâle**) permet de montrer que $c = -\frac{\pi^2}{12}$ et donc $S(x) \sim_{+\infty} -\frac{\pi^2}{12x^2}$.

— Montrer que S est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $\int_0^{+\infty} S(t)dt$.

► Comme S est une série alternée, on peut lui appliquer le **théorème des séries alternées** et écrire que

$$|S(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \text{ (majoration du reste d'ordre 1)}$$

L'intégrabilité du majorant sur \mathbb{R}_+^* assure celle de S sur cet ensemble. **Est-ce que l'intégrabilité sur \mathbb{R}_+^* des termes de la somme et leur CU vers S impliquent l'intégrabilité de S sur cet ensemble ? c.f. théorème de la convergence dominée peut-être...**

► L'interversion série/intégrale permet de montrer que $\int_0^{+\infty} S(t) dt =$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln(2) \text{ (c.f. Deux sommes).}$$

Dans la correction (p. 374), on effectue le calcul sur une somme partielle et on détermine ensuite la limite de cette somme. J'avais naïvement travaillé avec l'intégrale jusqu'en $+\infty$ et la somme aussi, **est-ce licite ?**

11.4 Équivalent d'une série de fonctions

EXERCICE 11.4.1 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$. Donner un équivalent de f et 0^+ .

► **SOLUTION.** Effectuer une comparaison série/intégrale aux termes de la somme pour encadrer f (ne pas oublier de justifier l'intégrabilité des fonctions sur $[1, +\infty[$) :

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{t(1+tx^2)} dt + \frac{x}{1+x^2} \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t(1+tx^2)} dt + \frac{x}{1+x^2}.$$

Décomposer les intégrandes en éléments simples et calculer les intégrales :

$$-2x \ln(x) + o_0(x \ln(x)) \leq f(x) \leq -2x \ln(x) + o_0(x \ln(x))$$

Finalement,

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} -2x \ln(x)$$

◀

11.5 Série de fonctions continues dont la somme est discontinue

Source : [6] p.257

PROPOSITION 11.5.1 — Soit la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , de terme général

$$\begin{aligned} f_n &: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = (1-x)x^n. \end{aligned}$$

La somme des f_n est discontinue.

■ **DÉMONSTRATION.** Pour tout point x de $[0, 1[$, la série $\sum f_n(x)$ est le produit par $(1-x)$ d'une série géométrique de raison x où $0 \leq x < 1$, donc elle converge et sa somme est égale à $(1-x)/(1-x) = 1$. De plus $f_n(1) = 0$ pour tout entier naturel n . La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur le segment $[0, 1]$ et sa somme est l'application

$$\begin{aligned} S &: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

qui est discontinue en 1. □

11.6 Fonction ζ alternée

Source : [5] (Exercice 13, TD VIII)

On définit la fonction ζ alternée F comme suit

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

— Déterminer l'ensemble de définition de F et trouver une relation entre F et ζ .

— Calculer $\zeta(x) - F(x)$ pour trouver que $\zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} F(x)$.

— Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\zeta(x)$.

— En comparant ζ à une intégrale, on peut montrer que $\frac{1}{1-x} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{1-x} + 1$.

— On peut aussi procéder de la manière suivante : ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$ donc ζ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ en 1.

► Si $\ell \in \mathbb{R}_+$, par passage à la limite dans l'inégalité $\zeta(x) \geq$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x},$$

$$\ell \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\ell = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$.

— Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ainsi qu'un équivalent de ζ en $+\infty$.

— On peut montrer que (à détailler) $\zeta(x) \sim_{+\infty} 1$.

11.7 GRAIN DE RAISIN : Fonctions continues nulle part dérivables

Source : [6] p. 160

Jusqu'à la moitié du XIX^e siècle, on pensait généralement qu'une fonction continue était dérivable sauf peut-être en quelques points. AMPÈRE prétendit même l'avoir démontré en 1806. BOLZANO donne vers 1830 un exemple de fonction continue, mais dérivable nulle part ; cependant ses écrits restent méconnus. En 1854, Bernhard RIEMANN, propose sans preuve, la fonction :

$$R : x \mapsto R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Karl WEIERSTRASS se déclare incapable de la démontrer. Il faut attendre 1971 pour savoir que R n'est pas dérivable sauf en certains points. En 1872, Karl WEIERSTRASS démontre que si a et b sont des réels tels que $a > 0$, $b > 0$ et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, la fonction :

$$f : x \mapsto f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(a^n x)$$

est continue sur \mathbb{R} et n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

Notations.

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et F l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulle part dérivables sur $[0, 1]$.

THÉORÈME 11.7.1 — . L'ensemble F est non vide.

■ **DÉMONSTRATION.** Notons :

— $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{n \in \mathbb{N}} |x - n|,$

— $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Delta_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta(2^n x)}{2^n},$

— $\forall x \in [0, 1], W(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(x).$

Nous allons montrer que la fonction W est un élément de F .

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées. »

Charles HERMITE (1893)

« C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

Jean PERRIN ¹, au sujet du mouvement brownien.

Source : Exo Maths X MP #60 - Densité des fonctions nulle part dérivables - share.miple.com

- ▷ **Continuité.** La fonction Δ est minimale sur \mathbb{N} où elle vaut 0, et est maximale sur $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$ où elle vaut $\frac{1}{2}$, d'où $\Delta \leq \frac{1}{2}$ et donc $\Delta_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Les fonction Δ_n étant continues et $\sum \Delta_n$ convergeant normalement, la fonction W est continue.
- ▷ **Non-dérivabilité.** Soit $x \in [0, 1]$. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$x_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lfloor 2^p x \rfloor}{2^p} \text{ et } y_p \stackrel{\text{def}}{=} x_p + \frac{1}{2^p}.$$

Étudions la limite de $\frac{W(x_p) - W(y_p)}{x_p - y_p}$ quand p tend vers $+\infty$:

- Si $n \geq p$, alors $2^n x_p$ et $2^n y_p$ sont des entiers. Donc $\Delta_n(x_p) = \Delta_n(y_p) = 0$ et $\frac{\Delta_n(x_p) - \Delta_n(y_p)}{x_p - y_p} = 0$.
- Si $n < p$, alors $x_p, y_p \in I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left[x_n, \frac{x_n + y_n}{2} \right]$ ou $x_p, y_p \in I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{x_n + y_n}{2}, y_n \right]$. Δ_n a une pente 1 sur I_1 et une pente -1 sur I_2 . Donc $\frac{\Delta_n(x_p) - \Delta_n(y_p)}{x_p - y_p} = (-1)^{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}$.

Donc :

$$\frac{W(x_p) - W(y_p)}{x_p - y_p} = \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}.$$

Notons $r_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W(y_p) - W(x_p)}{y_p - x_p}$. La suite $(r_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ne converge par puisque $r_{p+1} - r_p = (-1)^{\lfloor 2^{n+1} x \rfloor}$ ne tend pas vers 0.

Comme $x_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x$ et $y_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x$, on en conclut que W n'est pas dérivable en x et donc est nulle part dérivable sur $[0, 1]$. □

11.7.1 Courbe du blancmanger ou de TAKAGI

Source : [6] p. 160

En 1903, le mathématicien japonais Teiji TAKAGI (1875-1960) propose les fonctions :

$$f : x \mapsto f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} b^n g(a^n x)$$

où g est la fonction de $g : x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ (distance de x à \mathbb{Z}) de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a et b des réels tels que $0 < b < 1$ et $a \leq 4$. Lorsque de plus $ab > 2$, la fonction f a des dérivées supérieures égales à $+\infty$ et inférieures égales à $-\infty$ en tout point de \mathbb{R} .

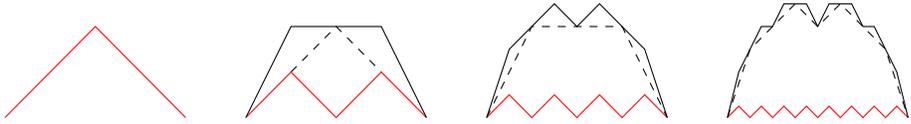
Source : Alain CAMANES DS MPSI1
10/01/2015

La fonction de TAKAGI a été introduite par Teiji TAKAGI en 1903 motivé par les fonctions nulle part dérivables de WEIERSTRASS après une visite en Allemagne de 1897 à 1901.

Une variante de la fonction de TAKAGI, utilisant la base 10 et non la base 2, a été introduite par VAN DER WAERDEN en 1930. Bien que non différentiables, ces fonctions possèdent des dérivées infinies en de nombreux points (tout comme la fonction de WEIERSTRASS). C'est pourquoi KNOPP a introduit en 1918 une variante de la fonction de TAKAGI qui, en tout point, n'admet ni de dérivée finie ni de dérivée infinie.

1: Physicien, chimiste et homme politique français (1870 - 1942), prix Nobel de physique 1926.

DÉFINITION 11.7.1 – Distance à \mathbb{Z} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\ll x \gg$ distance de x à \mathbb{Z} .



Construction graphique

PROPOSITION 11.7.1 – Expression de $\ll \cdot \gg$.

$$\ll \cdot \gg : x \mapsto \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|$$

■ **DÉMONSTRATION.**

□

DÉFINITION 11.7.2 – Courbe du blancmanger ou de TAKAGI. On définit cette courbe par la fonction

$$\begin{aligned} \tau : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ll 2^k x \gg . \end{aligned}$$

11.7.2 Courbe de BOLZANO-LEBESGUE

DÉFINITION 11.7.3 – Courbe de BOLZANO-LEBESGUE. On pose $I \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]$ et (f_n) la suite de fonctions définie par

- $f_0(x) = x$.
- f_n est affine sur $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right]$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$.
- f_n et f_{n-1} sont égales en $\frac{3k}{3^n}$, $\frac{3k+1}{3^n}$ et $\frac{3k+2}{3^n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$.

11.7.3 Densité de F dans E

THÉORÈME 11.7.2 – . F est dense dans E pour la topologie uniforme.

■ **DÉMONSTRATION.** Soient $f \in E$ et $W \in F$. La fonction $f - W$ est continue sur $[0, 1]$ donc peut être approchée uniformément par une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définies sur $[0, 1]$ d'après le théorème de WEIERSTRASS.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n + W$. La fonction B_n est continue et nulle part dérivable puisque si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ était dérivable en $x \in [0, 1]$, la fonction W le serait aussi. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ et nulle part dérivable qui converge uniformément vers la fonction f . □

Source : Exo Maths X MP #60 - Densité des fonctions nulle part dérivables – share.miple.co

Pour approfondir :

- Une famille nombreuse de fonctions continues partout dérivables nulle part – Christophe BERTAULT
- Le paragraphe éponyme dans [6] page 350.

11.8 A rajouter

- Intégrale à paramètre vs. série de fonctions
- Développements asymptotiques de sommes de séries de fonctions

12.1 Matrice et série entière

EXERCICE 12.1.1 Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$.

Montrer que son rang est pair. Étudier la convergence et la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{Tr}(A^n)$.

► **SOLUTION.** D'après l'énoncé, le polynôme $P(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^3 + X$ est annulateur de la matrice A . Le polynôme $P = X(X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples dans \mathbb{C} donc la matrice A est diagonalisable dans \mathbb{C} .

La diagonalisabilité de la matrice A équivaut à $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) = m$

soit $\dim E_0(A) + \dim_{-i}(A) + \dim_i(A) = m$. Comme $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$, d'après le théorème du rang, $\dim E_0(A) = m - \operatorname{Rg} A$. On sait aussi (à détailler peut être) que $p \stackrel{\text{def}}{=} \dim E_{-i}(A) = \dim E_i(A)$. On obtient alors

$$m - \operatorname{Rg} A + 2p = m$$

$$\text{soit } \operatorname{Rg} A = 2p.$$

◀

12.2 Série génératrice des polynômes d'HERMITE

DÉFINITION 12.2.1 – Polynômes d'HERMITE. La suite des polynômes d'HERMITE, notée $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est définie comme l'unique suite de polynômes réels tels que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \exp(tx - t^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n H_n(x) \quad (*)$$

■ **DÉMONSTRATION.** — ► L'existence se prouve en faisant le produit de CAUCHY des développements en série entière de $\exp(tx)$ et de $\exp(-t^2/2)$.

► L'unicité se justifie par l'unicité des coefficients d'un développement en série entière.

— Pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$, il faut dériver (*) par rapport à t , effectuer des changements d'indices et utiliser l'unicité des coefficients du DES.

— On peut montrer en dérivant la série de fonctions $\sum (x \mapsto t^n H_n(x))$ terme à terme sur \mathbb{R} que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H'_n = H_{n-1}$.

La dérivation est justifiée par l'application du **théorème de dérivation terme à terme**, en particulier montrer soigneusement

la CN de $\sum f'_n$ sur tout segment $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ (qui entraîne la CU sur \mathbb{R}) ($|H'_n(x)| \leq e^{|x|}$).
 On en déduit que $(H_n)_n$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

□

12.3 Théorème abélien ou taubérien sur les séries numériques

Source : [1] p. 398

THÉORÈME 12.3.1 - . Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.
Un théorème abélien : si $\sum a_n$ est convergente, alors f est définie et continue en 1.
Un théorème taubérien : si $(a_n)_n$ est à termes positifs et f a une limite à gauche en 1, alors $\sum a_n$ est convergente, de somme $\lim_{1^-} f$.

Source : [1] p. 398

■ **DÉMONSTRATION.** Un théorème abélien :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ de sorte que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, a_n = R_{n-1} - R_n.$$

On effectue une *transformation d'ABEL* afin d'établir la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f_n$ avec $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_n x^n$ sur $[0, 1]$. Soient $p \leq q$ et $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=p+1}^q a_n x^n &= \sum_{n=p+1}^q (R_{n-1} - R_n) x^n \\ &= \sum_{n=p+1}^q R_{n-1} x^n - \sum_{n=p+1}^q R_n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{par un changement de variable} &= \sum_{n=p}^{q-1} R_{n-1} x^n - \sum_{n=p+1}^q R_n x^n \\ &= R_p x^{p+1} - R_q x^q + \sum_{n=p}^{q-1} R_{n-1} (x^{n+1} - x^n). \end{aligned}$$

Comme $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Alors pour $p \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p+1}^q a_n x^n \right| &\leq |R_p| + |R_q| + \sum_{n=p+1}^{q-1} |R_n| |x^{n+1} - x^n| \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon \sum_{n=p+1}^{q-1} (x^n - x^{n+1}) \\ &\leq 2\varepsilon + \varepsilon \underbrace{(x^{p+1} - x^q)}_{\leq 1} \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, on a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad (n_0 \leq p \leq q) \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{n=p+1}^q a_n x^n \right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci exprime la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$, dont le terme général est continu sur $[0, 1]$; le somme f est donc définie et continue sur $[0, 1]$. \square

12.4 Fonction non développable en série entière

Source : [6] p. 263

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

12.5 Comparaison de séries entières au bord

EXERCICE 12.5.1 Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes positifs, on pose :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

On suppose que les rayons de convergence valent 1, que $\sum b_n$ diverge et que $a_n = o(b_n)$.

Montrer que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ et que $f = o_{1^-}(g)$.

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** — Même méthode que pour la fonction zêta alternée.

— Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$. (détailler le dernier argument qui permet de conclure rigoureusement).

◁

12.6 Développement en série entière

EXERCICE 12.6.1 La fonction f définie par :

$$f(x) = \exp(x^2) \int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt$$

est-elle développable en série entière? Calculer les coefficients du développement en série entière à l'aide de factorielles, on utilisera que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

— Bien justifier l'existence de f sur \mathbb{R} .

— L'écriture de f sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(x^2) \times \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt + \int_0^x \exp(-t^2) dt \right)$$

permet de justifier que f est DSE (comme primitive d'une fonction DSE et d'un produit de fonctions DSE).

— Remarquer que f vérifie

$$f' - 2xf + 1 = 0$$

— On en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^p} \text{ et } a_{2p+1} = -\frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!}.$$

12.7 Série entière lacunaire

EXERCICE 12.7.1 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

► **SOLUTION.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}}_{\stackrel{\text{def}}{=} A} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}}_{\stackrel{\text{def}}{=} B} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}}_{\stackrel{\text{def}}{=} C}. \quad (12.1)$$

On note $j \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $(jx)^{3n} = x^{3n}$, $(jx)^{3n+1} = jx^{3n+1}$ et $(jx)^{3n+2} = j^2 x^{3n+2}$ (la figure ci-contre permet de se rendre compte géométriquement de cette cyclicité). Donc en évaluant (12.1) respectivement en jx et en $j^2 x$ on obtient deux nouvelles équations

$$\begin{cases} e^{jx} &= A + B + C \\ e^{j^2 x} &= A + jB + j^2 C \\ e^{j^2 x} &= A + j^2 B + jC \end{cases}$$

Comme $1 + j + j^2 = 0$, en sommant ces trois relations on obtient

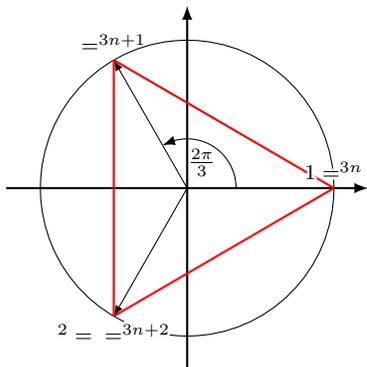
$$A = \frac{1}{3} (e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}).$$

Cette quantité est bien réelle car $j^2 = \bar{j}$. ◁

REMARQUE 12.7.1 On étend facilement le résultat aux séries entières p -lacunaires $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!}$.

12.8 A rajouter :

- Transformée de LAPLACE d'une série entière
- Formule de CAUCHY et applications
- Fonction de BESSEL et intégrale de WALLIS



13.1 Lemme de GRONWALL, application à une équation différentielle

LEMME 13.1.1 Soient ψ, φ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s) ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds.$$

13.2 Solutions de $y'' + y = h$

DM 22 :

Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f_0 : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^t h(u) \sin(t-u) du$ est solution de (F_h) .

13.3 Le wronskien

13.4 Relèvement angulaire

13.5 Variables séparables

EXERCICE 13.5.1 [1] p;458

Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation

$$y' = \sqrt{1 - y^2}.$$

► SOLUTION.

◀

- Système différentiel en $z = x + iy$
- Système différentiel antisymétrique
- Équation d'ordre 1 avec raccordement
- Variation des constantes
- Équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec raccordement
- Équation non linéaire (de BERNOULLI)
- Intégrale de DIRICHLET via une équation différentielle
- Méthode des moindres carrés
- Fonctions harmoniques

DÉNOMBREMENT,
PROBABILITÉS & VARIABLES
ALÉATOIRES

14.1 Identité de VANDERMONDE

PROPOSITION 14.1.1 – .

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

Les deux expressions correspondent à deux façons de dénombrer les parties à p éléments de $E \cup F$, où E et F sont deux ensembles disjoints fixés, de cardinaux respectifs m et n .

14.2 Dénombrement des applications strictement croissantes

EXERCICE 14.2.1 Calculer le nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

► ÉLÉMENTS DE SOLUTION. Réponse : $\binom{n}{p}$ ◀

14.3 Dénombrement des applications croissantes

EXERCICE 14.3.1 Calculez le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

► ÉLÉMENTS DE SOLUTION. Réponse : $\binom{n+p-1}{p}$
Représenter les éléments de l'ensemble de départ par des *barres* qu'il faut placer entre les *cases* de l'ensemble d'arrivée. ◀

14.4 Dénombrement des surjections

EXERCICE 14.4.1 Calculer le nombre $S(p, n)$ de surjections de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

► ÉLÉMENTS DE SOLUTION. Principe d'inclusion-exclusion – [wikipedia.org](https://fr.wikipedia.org)

Étudier des cas particuliers

Montrer que $n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$

En déduire que $S(p, n) = (-1)^n \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j^p$. ◀

14.5 Discontinuités des fonctions monotones

PROPOSITION 14.5.1 — . Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction monotone. Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

EXERCICE 14.5.1 Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction croissante. Pour tout $x \in]a, b[$, on pose $f(x^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$, $f(x^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ et $v_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^+) - f(x^-)$.

1. Soit $x \in]a, b[$. Montrer que $v_f(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si f est continue en x .
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < \dots < x_p$ des réels de $]a, b[$. Montrer que $\sum_{j=1}^p v_f(x_j) \leq f(b) - f(a)$.
3. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des points $x \in]a, b[$ tels que $v_f(x) > \alpha$ est fini.
4. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

► **SOLUTION.** 1. Soit $(x, y, z) \in]a, b[^3$ tel que $y \leq x \leq z$. Par croissance de f on a $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$. La monotonie de la fonction f assure qu'elle admet des limites à gauche et à droite en tout point. Donc par passage à la limite dans l'encadrement,

$$f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

On en déduit que $v_f(x) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f(x^+) = f(x) = f(x^-)$ i.e. si et seulement si f est continue en x .

2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p v_f(x_i) &= \sum_{i=1}^p (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \\ &= f(x_p^+) - f(x_p^-) + \sum_{i=1}^{p-1} (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \\ &\leq f(b) - f(x_p^-) + \sum_{i=1}^{p-1} (f(x_{i+1}^-) - f(x_i^-)) \\ \text{par télescopage} &\leq f(b) - f(x_1^-) \\ &\leq f(b) - f(a) \end{aligned}$$

3. Soit $\alpha > 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'ensemble des points $x \in]a, b[$ tels que $v_f(x) > \alpha$ est infini. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 2,

$$\underbrace{f(b) - f(a)}_{\in \mathbb{R}} \geq \sum_{i=0}^p v_f(x_i) \geq p\alpha \xrightarrow{p \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{car } \alpha > 0.$$

On aboutit donc à une contradiction et l'ensemble des points $x \in]a, b[$ tels que $v_f(x) > \alpha$ est fini.

4. Soit \mathcal{D} l'ensemble des points de discontinuité.

On pose $\mathcal{D}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [a, b], v_f(x) > \alpha\}$.

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{D}_\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_{\frac{1}{n}}.$$

Nous avons écrit l'ensemble \mathcal{D} comme une union dénombrable d'ensembles finis donc \mathcal{D} est au plus dénombrable.

◁

Voir aussi l'exercice 4.10 (p. 297) de [12] dont l'énoncé est :

EXERCICE 14.5.2 Soit A une partie dénombrable de \mathbb{R} . Montrer l'existence d'une fonction monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont A est l'ensemble des points de discontinuités.

14.6 Nombres algébriques

EXERCICE 14.6.1 Un nombre z est *algébrique* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0.$$

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

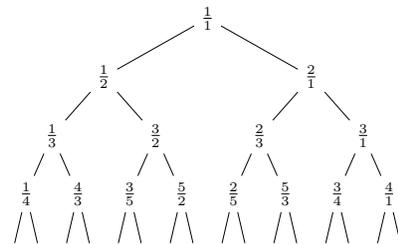
► **SOLUTION.** Les rationnels sont dénombrables ... ♦ Donc pour n fixé, $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable en tant que produits finis d'ensembles dénombrables. Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Pour tout polynôme dans $\mathbb{Q}_n[X]$, le nombre de ses racines est fini et de cardinal inférieur à n . Donc les nombres algébriques sont dénombrables car on peut établir une application surjective de leur ensemble sur une réunion dénombrable d'ensembles finis.

◁

Source : [5] (Exercice 2 TD VI)

Définition à revoir sur le corps des coefficients



♦ L'arbre de CALKIN-WILF est un arbre dont les sommets sont en bijection avec les nombres rationnels positifs.

PROBABILITÉS 15

15.1 Loi d'un maximum/minimum

15.2 Lemmes de BOREL-CANTELLI

LEMME 15.2.1 Si la somme des probabilités d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

- *APPLICATION: Lemme de Borel-Cantelli - Partie 1* – Hattab MOUJRIA
- *APPLICATION: Lemme de Borel-Cantelli - Partie 2* – Hattab MOUJRIA
- [14] II) §5 p. 34.

15.3 Chaîne de MARKOV

15.4 Exercice d'oral

EXERCICE 15.4.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit B un ensemble non vide et $(A_\beta)_{\beta \in B}$ une famille d'événements deux à deux disjoints de \mathcal{A} telle que pour tout $\beta \in B, \mathbf{P}(A_\beta) > 0$. Montrer que B est au plus dénombrable.
2. Soit X une variable aléatoire indépendante d'elle-même. Montrer que X est constante.

Source : [5]

MÉTHODE 15.4.1 Écrire l'ensemble sous la forme d'une union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables ou finis.

► **SOLUTION.** 1. Soit I un ensemble non vide.

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{ \beta \in B \mid \mathbf{P}(A_\beta) \geq \frac{1}{n} \right\}}_{\stackrel{\text{def}}{=} I_n}.$$

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in (I_n)^p$ deux à deux distincts. Alors

$$1 \geq \mathbf{P} \left(\bigsqcup_{i=1}^p A_{\beta_i} \right) = \sum_{i=1}^p \mathbf{P}(A_{\beta_i}) \geq \sum_{i=1}^p \frac{1}{n}$$

donc $p \leq n$.

Ainsi, I_n est fini et $|I_n| \leq n$ i.e. I est au plus dénombrable.

2. **À vérifier** Soit $\omega \in X(\Omega)$. Par indépendance de X avec elle-même,

$$\mathbf{P}(X = \omega) = \mathbf{P}(\{X = \omega\} \cap \{X = \omega\}) = \mathbf{P}(X = \omega)^2.$$

On en déduit que $\mathbf{P}(X = \omega) \in \{0, 1\}$.

De plus, $\sum_{\omega \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = \omega) = 1$ et donc il existe un unique $\omega_0 \in X(\Omega)$

tel que $X = \omega_0$ presque sûrement i.e. X est presque sûrement constante.

◁

15.5 Fonction indicatrice d'EULER

DÉFINITION 15.5.1 – Fonction indicatrice d'EULER. La fonction indicatrice d'EULER est une fonction arithmétique de la théorie des nombres, qui à tout entier naturel n non nul associe le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n . Autrement dit,

$$\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$$n \mapsto \text{Card}\left(\left\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\right\}\right).$$

faire un graphe de φ

PROPOSITION 15.5.1 – La fonction indicatrice d'EULER peut s'écrire

$$\varphi : n \mapsto n \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

en notant \mathcal{P}_n l'ensemble des nombres premiers divisant n .

■ **DÉMONSTRATION.** (Wikipedia)

La valeur de l'indicatrice d'EULER s'obtient à partir de la décomposition en facteurs premiers de n . On note $n = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{k_i}$. Alors, $\varphi(n) = \square$

Source : RMS 132 3 p.32.

EXERCICE 15.5.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Source : [5] (Exercice 17. Chap. VI)

EXERCICE 15.5.2 On note φ la fonction indicatrice d'EULER. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Les points suivants ne peuvent être compris qu'avec la correction.

— Q2) : Résultat à retenir (bien que rappeler dans le DS5) :

$$\forall p \in J \subset \mathbf{P}, p \text{ divise } a \iff \prod_{p \in J} p \text{ divise } a$$

— Q3) : un élément de Ω est premier avec n si et seulement si il n'est divisible par aucun des diviseurs premiers de n . D'où

$$\mathbb{P}\left(\left\{m \in \Omega \mid m \wedge n = 1\right\}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

— Q4) : Calculer le cardinal de $B_j = \{j \cdot d, j \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid j \wedge k = 1\}$.

— Q5) : Montrer que $(B_d)_{d|n}$ forme un SCE de Ω et en déduire la formule de l'énoncé. ($\Omega = \bigcup_{d|n} B_d$) à compléter

15.6 Exercice 4. Chap. VII :

EXERCICE 15.6.1 Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B . Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

16.1 Inégalités de concentration (et transformées de LAPLACE)

- Inégalité de MARKOV
- Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV
- Loi faible des grands nombres

16.2 Calcul de $\mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^4 \right]$

EXERCICE 16.2.1 On suppose que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires iid. Calculer $\mathbf{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^4 \right]$.

► **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.** Écrire la somme comme une somme sur quatre indices, utiliser la linéarité de l'espérance i.e. $\sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} \mathbf{E}[X_i X_j X_k X_l]$

et distinguer les cas suivants :

- $|\{i, j, k, l\}| = 4$ (tous les indices sont deux à deux distincts). Par l'indépendance des v.a., $\mathbf{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbf{E}[X_i]^4$.
- $|\{i, j, k, l\}| = 3$ (deux des indices sont égaux) : $\mathbf{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbf{E}[X_i^2] \mathbf{E}[X_k] \mathbf{E}[X_l]$.
- $|\{i, j, k, l\}| = 2$ (trois des indices sont égaux) : $\mathbf{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbf{E}[X_i^3] \mathbf{E}[X_l]$.
- $|\{i, j, k, l\}| = 1$ (tous les indices sont égaux) : $\mathbf{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbf{E}[X_i^4]$.

◁

16.3 Distance en variation totale

En mathématiques et plus particulièrement en théorie des probabilités et en statistique, la distance en variation totale (ou distance de variation totale ou encore distance de la variation totale) désigne une distance statistique définie sur l'ensemble des mesures de probabilité d'un espace probabilisable.

EXERCICE 16.3.1 Soit \mathcal{E} l'espace des suites réelles $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série $\sum |p_n|$ converge, muni de la norme $p = \sum_{n=0}^{+\infty} |p_n|$. Soit \mathcal{P} le sous-ensemble de \mathcal{E} formé des suites réelles positives $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $p = 1$.

1. Montrer que \mathcal{P} est borné et convexe.

Source : [5] (Exercice 8. Chap. VII)

DÉFINITION 16.3.1 – Ensemble convexe. Un ensemble \mathcal{X} est dit convexe lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}^2 \quad \forall t \in [0, 1] \\ tx + (1 - t)y \in \mathcal{X}.$$

2. Pour $P, Q \in \mathcal{P}$, on pose $d(P, Q) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right|$.

Montrer que $d(P, Q) \in [0, 1]$.

3. Soit $(p, q) \in [0, 1]^2$, $P = (1 - p, p, 0, \dots)$ et $Q = (1 - q, q, 0, \dots)$. Déterminer $d(P, Q)$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'inégalité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \leq$

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.$$

5. Soient X_λ et X_μ deux variables aléatoires suivant une loi de POISSON de paramètres respectifs λ et μ . Soit $P_\lambda = (\mathbf{P}(X_\lambda = n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $P_\mu = (\mathbf{P}(X_\mu = n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'inégalité

$$d(P_\lambda, P_\mu) \leq \max_{A \subset \llbracket 0, n \rrbracket} \left| \sum_{k \in A} \mathbf{P}(X_\lambda = k) - \sum_{k \in A} \mathbf{P}(X_\mu = k) \right| \\ + \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\mu^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- **ÉLÉMENTS DE SOLUTION.**
1. Les éléments de \mathcal{P} sont des suites positives...
 2. Bien justifier l'existence de la borne supérieure.
 3. Considérer une partie B de \mathbb{N} et distinguer quatre cas ($\{0\} \subset B$ et $\{1\} \not\subset B$; $\{0\} \not\subset B$ et $\{1\} \subset B$; $\{0, 1\} \subset B$; $\{0, 1\} \not\subset B$). Le résultat est $d(P, Q) = |p - q|$.
 4. Passer par la formule de TAYLOR avec reste intégral.
 5. Soit B une partie de \mathbb{N} . Écrire $B = (B \cap \llbracket 0, n \rrbracket) \cup \{k \in B \mid k > n\}$. Sommer sur ces deux ensembles, séparer la valeur absolue et majorer à l'aide de la question précédente. (à détailler)

◀

16.4 Majoration de la variance d'une v.a.d.r.

EXERCICE 16.4.1 Exercice 5. Chap. VII

Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que $\mathbf{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ et discuter le cas d'égalité.

► **SOLUTION.** Deux méthodes sont introduites.

Méthode 1 :

- Poser la fonction $f : t \mapsto \mathbf{E}[(X - t)^2]$.
- f atteint son minimum en $\mathbf{E}[X]$ et vaut $\mathbf{V}(X)$.
- Comparer $\mathbf{V}(X)$ à $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
- Voir [Variance of a bounded random variable – stats.stackexchange.com](https://stats.stackexchange.com)

Méthode 2 : (vue en cours)

- Justifier l'existence de l'espérance et de la variance
- $\sum \gamma^n \mathbf{P}(X = x_k)$ converge, avec $\gamma = \max\{|a|, |b|\}$ (ne pas oublier les valeurs absolues car on ne connaît pas les signes de a et de b).
- On remarque que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)$

— Or comme $a \leq X \leq b$,

$$\left| X - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \text{ et } \left(X - \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

— Donc par le théorème de KÖNIG-HUYGENS,

$$\mathbf{V} \left(X - \frac{a+b}{2} \right) = \mathbf{E} \left[\underbrace{\left(X - \frac{a+b}{2} \right)^2}_{\leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^2} \right] - \underbrace{\mathbf{E} \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2}_{\geq 0}$$

$$\mathbf{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4} \text{ par croissance de l'espérance}$$

THÉORÈME 16.4.1 – Théorème de KÖNIG-HUYGENS. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E} \left[X^2 \right] - \mathbf{E}[X]^2.$$

Cas d'égalité

D'après la majoration du premier terme et la minoration du deuxième terme de la relation ci-dessus, il y a égalité si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{4} &\iff \begin{cases} \mathbf{E} \left[\left(X - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] = \frac{(b-a)^2}{4} \\ \text{et} \\ \mathbf{E} \left[X - \frac{a+b}{2} \right]^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathbf{P} \left(X - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 \right) = 1 \\ \text{et} \\ \mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathbf{P}(\{X = b\} \cup \{X = a\}) = 1 \\ \text{et} \\ \mathbf{E}[X] = \frac{a+b}{2} \end{cases} \\ \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{4} &\iff \mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = b) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

◁

16.5 Identité de WALD

PROPOSITION 16.5.1 – Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, **mutuellement indépendantes**, de même loi à valeurs dans \mathbb{N} , et T une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} indépendante des précédentes. La famille $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$,

puis, $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

Alors on a $G_S = G_T \circ G_X$ et $\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[T]\mathbf{E}[X]$.

16.6 Allumettes de BANACH

Source : [2]

EXERCICE 16.6.1 On a deux boîtes d'allumettes G et D chacune contenant n allumettes. On choisit aléatoirement une boîte et on en retire une allumette, et on recommence jusqu'à ce que l'une des deux boîtes soit vide.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire R du nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte.
2. Dans cette question, on considère qu'on s'arrête lorsque pour la première fois on choisit une boîte et on constate qu'elle est vide. Déterminer la loi de la variable aléatoire R' du nombre d'allumettes restant dans l'autre boîte.
3. Calculer l'espérance de R , et déduire que $\mathbf{E}(R) \sim_{+\infty} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

16.7 Urne de PÓLYA

Source : [2]

EXERCICE 16.7.1 Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient a boules rouges et b boules noires. On tire une boule au hasard, on constate sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c nouvelles boules de sa couleur. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n l'événement : « la n -ième boule tirée est rouge ».

1. Calculer $\mathbf{P}(R_1)$ et $\mathbf{P}(R_2)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(R_n)$ pour tout n .

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}(X = k)$	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{V}(X)$	G_X	ρ
Constante	c	$\{c\}$	1	c	0	t^c ($c \in \mathbb{N}$)	$+\infty$
Uniforme	$a < b \in \mathbb{N}$	$\llbracket a, b \rrbracket$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{t^a-t^{b+1}}{(b-a+1)(1-t)}$	$+\infty$
BERNOULLI	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	p ($k = 1$)	p	pq	$q + pt$	$+\infty$
Binomiale	$(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq	$(q + pt)^n$	$+\infty$
Géométrique	$p \in]0, 1[$	\mathbb{N}^*	pq^{k-1}	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pt}{1-qt}$	$\frac{1}{q}$
POISSON	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	\mathbb{N}	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

Source : Variables aléatoires discrètes – Cours ([5])

17.1 Endomorphismes nilpotents

1. 2.10 Inversion par sommation géométrique des endomorphismes nilpotents on page 23
2. 2.11 Matrices de taille 3 d'ordre de nilpotence égal à 2 on page 24
3. 2.12 Famille libre engendrée par un endomorphisme nilpotent on page 24
4. 2.14 Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes on page 27
5. 2.15 Produit de matrices nilpotentes commutantes on page 28
6. Section 2.16 on page 30
7. 2.18 Rang des puissances d'un endomorphisme nilpotent on page 31
8. 2.19 Rang d'un endomorphisme nilpotent on page 32
9. 4.13 Critère de nilpotence par la trace on page 63
10. Section 5.10 on page 85

Résumé des propriétés des endomorphismes nilpotents :

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre de nilpotence $p > 1$.

[10]. Caractérisation de la nilpotence

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) u est nilpotent ;
- (ii) $\chi_u = (-1)^n X^n$;
- (iii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_u = X^p$ (p est alors l'indice de nilpotence de u) ;
- (iv) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale ;
- (v) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0 ;
- (vi) 0 est la seule valeur propre de u .

MATHÉMATIENS

ABEL Niels Henrik (Finnøy, 1802 - Froland, 1829)
BERNOULLI Jakob (Bâle, 1654 - Bâle, 1705)
BERNSTEIN Sergueï Natanovitch (Odessa, 1880 - Moscou, 1968)
BERTRAND Joseph (Paris, 1822 - Paris, 1900)
BESSEL Friedrich Wilhelm (Minden, 1784 - Königsberg, 1846)
BOREL Émile (Saint-Affrique, 1871 - Paris, 1956)
CANTELLI Francesco Paolo (Palerme, 1875 - Rome, 1966)
CAUCHY Augustin Louis (Paris, 1789 - Sceaux, 1857)
CAYLEY Arthur (Richmond, 1821 - Cambridge, 1895)
CESÀRO Ernesto (Naples, 1859 - Torre Annunziata, 1906)
CHASLES Michel (Épernon, 1793 - Paris, 1880)
CRAMER Gabriel (Genève, 1704 - Bagnols-sur-Cèze, 1752)
DARBOUX Gaston (Nîmes, 1842 - Paris, 1917)
DIRICHLET Johann Peter Gustav Lejeune (Düren, 1805 - Göttingen, 1859)
DUHAMEL Jean-Marie (Saint-Malo, 1797 - Paris, 1872)
EULER Leonhard (Bâle, 1707 - Saint-Petersbourg, 1783)
FOURIER Joseph (Auxerre, 1768 - Paris, 1830)
FUBINI Guido (Venise, 1879 - New York, 1943)
GAUSS Carl Friedrich (Brunswick, 1777 - Göttingen, 1855)
GERSCHGORIN Semion Aronovitch (Proujany, 1901 - Saint-Petersbourg, 1933)
GRAM Jørgen Pedersen (Haderslev, 1850 - Copenhagen, 1916)
GRONWALL Thomas Hakon (Dylta bruk, 1877 - New York City, 1932)
HADAMARD Jacques (Versailles, 1865 - Paris, 1963)
HAMILTON William Rowan (Dublin, 1805 - Dublin,

1865)
HERMITE Charles (Dieuze, 1822 - Paris, 1901)
HILBERT David (Königsberg, 1862 - Göttingen, 1943)
HUYGENS Christian (La Haye, 1629 - La Haye, 1695)
HÖLDER Otto Ludwig (Stuttgart, 1859 - Leipzig, 1937)
IWASAMA Kenkichi (Kiryū, 1917 - Tokyo, 1998)
KÖNIG Johann Samuel (Büdingen, 1712 - Zuilenstein, 1757)
LAGRANGE Joseph-Louis (Turin, 1736 - Paris, 1813)
LAGUERRE Edmond (Bar-le-Duc, 1834 - Bar-le-Duc, 1886)
LAPLACE Pierre-Simon de (Beaumont-en-Auge, 1749 - Paris, 1827)
LEBESGUE Henri-Léon (Beauvais, 1875 - Paris, 1941)
LEGENDRE Adrien-Marie (Paris, 1752 - Paris, 1833)
MARKOV Andreï Andreïevitch (Riazan, 1856 - Saint-Petersbourg, 1922)
MONGE Gaspard (Beaune, 1746 - Paris, 1818)
PYTHAGORE (, - ,)
RAABE Joseph Ludwig (Brody, 1801 - Zurich, 1859)
RIEMANN Bernhard (Breselenz, 1826 - Selasca, 1866)
ROLLE Michel (Ambert, 1652 - Paris, 1719)
STIRLING James (Garden, 1692 - Édimbourg, 1770)
STONE Marshall Harvey (New York City, 1903 - Madras, 1989)
TSCHEBYCHEV Pafnouti Lvovitch (Borovsk, 1821 - Saint-Petersbourg, 1894)
VANDERMONDE Alexandre-Théophile (Paris, 1735 - Paris, 1796)
WALD Abraham (Kolozsvár, 1902 - Travancore, 1950)
WALLIS John (Ashford, 1616 - Oxford, 1703)
WEIERSTRASS Karl (Ostenfelde, 1815 - Berlin, 1897)
WIRTINGER Wilhelm (Ybbs an der Donau, 1865 - Ybbs an der Donau, 1945)

RÉFÉRENCES

- [1] Florent NICAISE. *L'Oral de MATHÉMATIQUES aux concours X-Mines-Centrale-Ensam*. Ellipses, 2013 (cf. p. 5, 8, 15, 17, 18, 20, 30, 38, 40, 50, 82, 84, 87, 98, 105, 109, 111, 124, 127, 131, 132, 135, 146, 149).
- [2] Fares MAALOUF. URL : <https://fmaalouf.com/documents/> (cf. p. 5, 16, 34, 41, 42, 119, 121, 164).
- [3] Jean DIEUDONNÉ. *Calcul infinitésimal*. Hermman (cf. p. 6, 122, 133, 134, 136).
- [4] Jean-Louis ROUGET. *Maths France*. URL : <https://www.maths-france.fr/index.php> (cf. p. 12-14, 17, 28, 32, 41, 54, 63, 67, 72, 73, 75, 111-113, 116, 135).
- [5] Alain CAMANES. *Cours & Exercices de PSI*. URL : <https://acamanes.github.io/psi/chapitres.html> (cf. p. 19, 28, 30, 38, 45, 50, 61, 75, 78, 79, 97, 99, 102, 103, 112, 121, 123, 124, 134, 136, 140, 154, 155, 157, 158, 161, 165).
- [6] Bertrand HAUCHECORNE. *Les CONTRE-EXEMPLES en MATHÉMATIQUES*. Ellipses, 1988-2014 (cf. p. 21, 140-143, 147).
- [7] *Mathématiques PSI/PSI**. Ellipses (cf. p. 24).
- [8] S. NICOLAS S. FRANCINO H. GIANELLA. *Oraux X-ENS 2*. Cassini (cf. p. 27, 43, 45).
- [9] R. MNEIMNÉ R. MANSUY. *Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes*. de Boeck (cf. p. 28, 29, 31, 55, 66, 67).
- [10] Gabriel PEYRÉ VINCENT BECK Jérôme MALICK. *Objectif Agrégation - Mathématiques*. H&K (cf. p. 35, 62, 74, 167).
- [11] Denis SERRE. *Les Matrices Théorie et pratique*. Dunod (cf. p. 44, 47, 75, 89, 90).
- [12] S. NICOLAS S. FRANCINO H. GIANELLA. *Oraux X-ENS 3*. Cassini (cf. p. 89, 102, 103, 105, 129, 131, 155).
- [13] *Revue de Mathématiques Spéciales*. Epistemon, Avril 2021 N°3 (cf. p. 104).
- [14] Roger MANSUY. *Introduction aux graphes aléatoires*. Calvage & Mounet (cf. p. 157).

ALPHABETICAL INDEX

preface, iii